Bruch/Rechnung an der Uni

Hochschuldidaktische Überlegungen zum Aufbau des Zahlensystems

von
Harald Nusser, e–mail: nusser@math.fu-berlin.de
Institut für Mathematik I, Freie Universität Berlin

0. Einleitung

> Es war sein erster Tag an der Uni. Die Veranstaltung Lineare Algebra I sollte im Hauptgebäude im Raum JK 29 236 stattfinden. Er war spät dran und beschloß daher, nach dem Weg zu fragen. Sonst versuchte er immer, alles selber zu finden, auch wenn es manchmal länger dauerte. Da lief ihm ein Mann mit grauen Schläfen über den Weg, sicher ein Professor, er wüßte bestimmt, wo es langging: *Sehen Sie, das ist so. 236 ist die Raumnummer, das ist hier alles ganz verrückt und kompliziert eingerichtet. Die Buchstaben JKL, nach denen hier alles eingeteilt wird, schienen uns damals die drei unverdächtigsten Buchstaben zu sein, die im deutschen Alphabet aufeinanderfolgen, daher haben wir sie ausgewählt, das heißt, ich war damals nicht in der Auswahlkommission, ich hätte mir auch vorstellen können, FGH zu nehmen, aber da war man damals wohl anderer Ansicht. Nun ja, die 2 bei der 29 steht für den ersten Stock. Das klingt paradox, nicht wahr? Es macht aber Sinn, denn wir fangen bei eins an zu zählen und wollten das E nicht für Erdgeschoß benutzen, also sind wir hier im ersten Stock, obwohl es zu ebener Erde ist (...) . JK 29 236 ist also dahinten die Treppe hoch.* Er bedankte sich. Er hatte viel erfahren, den Raum aber fand er nicht. Schließlich fragte er den Pförtner: *Dit, is schwer, wa? Macht nüscht: Jehn Se, da hinten ruff, zweeten Jang rechts, dritte Tür links, klaro?!* Klaro. Diesen Raum hatte er gefunden, aber KL 27 123 würde wieder ein Abenteuer werden. Doch er hatte Glück, ein Kommilitone, er schien sich ausgiebig damit beschäftigt zu haben, erklärte ihm das System. 25 bis 32 seien in aufsteigender Reihenfolge Quergänge, sogenannte Straßen. J, K und L die Hauptwege, von denen die Straßen abzweigten. JK 29 236 befände sich zwischen Gang J und K in Querstraße 29. Er atmete auf, so schwer war es also nicht. Die Zimmernummern würde er schon selber finden.

Häufig heißt es, jeder Mathematikstudent solle sich, einem Rat ERICH HECKES folgend, einen kleinen Garten in der Mathematik anlegen, in dem er spazierengehen könne [11; S. 35 und 12; S. 188]. Dieses Anlegen eines Gartens wird durch Vorlesungen, Übungen, Seminare etc. erheblich begünstigt. Sich als Student einen kleinen Garten anzulegen, ist als Aufforderung zu verstehen, sich auch im Betrieb der Universität seines Spieltriebs, eines Antriebs zum *natürlichen Lernen*, zu bedienen. DIENES schreibt dazu:

Natürliches Lernen ist nicht immer dem künstlichen vorzuziehen, es ist jedoch a priori *wahrscheinlicher, daß es wirksamer ist. Vorheriges Studium des Planes unserer neuen Stadt würde ohne Zweifel den natürlichen Prozeß, ihre Struktur kennenzulernen, beschleunigen, obwohl es kaum glaubhaft ist, daß allein das Studium des Planes jemanden beim Finden seines Weges genauso sicher machen würde wie einen, der schon einige Jahre dort wohnt.* [4; S. 21]

Sich in ihren Gärten oder Stadtbezirken auszukennen, ist vielen Studenten der Mathematik kurz vor ihrem Examen möglich. Langes Üben und gegebenenfalls eine Abschlußarbeit in ihrem Vertiefungsbereich soll(t)en Garant dafür sein. Doch reicht das für einen Taxischein? Gemeint ist der Nachweis, Zusammenhänge in der Mathematik, neuralgische Punkte zu (er)kennen. Oder anders formuliert: Kennt der zukünftige Mathematiklehrer seine Mathematikstadt so, daß er in etwa weiß, wie er schnell von einem Bezirk in den nächsten kommt, daß er weiß, ob es Straßen von einem Bezirk in den nächsten gibt oder die Bezirke eventuell sogar ineinander übergehen, daß er weiß, worauf er beim Kennenlernen eines neuen zu achten hat oder was ihm beim Kennenlernen eines neuen hilfreich sein könnte?

Wie dem künftigen Mathematiklehrer oder überhaupt dem Mathematikstudenten dabei von den Hochschullehrern noch besser geholfen werden könnte, soll im Abschnitt 2 am Beispiel des Aufbaus des Zahlensystems angeregt werden.

In seinem Buch Analysis I schreibt OTTO FORSTER:

... ausgehend von den natürlichen Zahlen (die nach einem Ausspruch von L. KRONECKER *vom lieben Gott geschaffen worden sind, während alles andere Menschenwerk sei), [kann man auch] nacheinander die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen konstruieren (...). Diesen Aufbau des Zahlensystems sollte jeder Mathematik–Student im Verlaufe seines Studiums kennenlernen.* [5; S. 33]

1. Forderung nach wissenschaftlicher Fundierung

In seinem Aufsatz *Lehrerbildung* stellt HERBERT MESCHKOWSKI fest, das Studium der künftigen Lehrer müsse in die wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik einführen. Außerdem solle der zukünftige Lehrer auch verschiedene Methoden zur Einführung der reellen Zahlen kennen und etwas über die Grundlagenforschung wissen ([12; S. 186 f.]).

Darüber hinaus sollte man, denke ich, von einem guten Mathematiklehrer erwarten dürfen, daß er Auskunft über Grundideen seines Fachs geben kann und in der Lage ist, wesentliche Gedanken eines die Schulmathematik betreffenden Satzes möglichst in Verbindung mit einer Beweisidee mitteilen zu können. Dabei läßt sich in der Regel wesentliche von eher unwesentlicher Information leichter als in anderen Fächern trennen, da mit dieser Frage seltener Weltanschauungen verbunden sind. Zumindest dürften nur wenige Mathematiker der Behauptung, in der Mathematik, egal in welcher Teildisziplin, gebe es häufig

Existenzaussagen, denen sich im Anschluß an ihre Bejahung die Frage nach Eindeutigkeit anschließe, widersprechen. Ferner ist interessant, ob Existenz konstruktiv nachgewiesen werden kann oder nur indirekt. (Wenn überhaupt, gibt es an dieser Stelle Meinungsverschiedenheiten über die Aussagekraft der Existenzbehauptung.) Um jedoch entscheiden zu können, was an einem Beweisgedanken wesentlich ist, welches die Ideen sind und was eher unwichtige *Rechnerei* ist, erfordert es zumeist viel Arbeit. Besonders dann, wenn man selbständig entscheiden können soll, welche Resultate in der Mathematik als grundlegend anzusehen sind.

Nicht zuletzt um dies zu erreichen, ist das Veranstaltungsangebot einer Universität für Lehramtskandidaten mit dem für Diplomstudenten in der Regel bis auf wenige Ausnahmen identisch. Selbst angehende Grundschullehrer bearbeiten während ihres Studiums dieselben Übungsaufgaben wie die Diplomstudenten. Das hat zwar den Vorteil, daß sie sich danach schneller in ein zu ihrem Studienschwerpunkt zählendes Gebiet einarbeiten können, hat aber auch den von MESCHKOWSKI festgestellten Nachteil:

> *Man pflegte damals die Kritik an der wissenschaftlichen Ausbildung der Mathematiklehrer mit dem Einwand abzutun, daß das Studium der Mathematik eben ein* Niveaustudium *sei: Wer sich in der modernen Funktionentheorie auskennt und seinen Hochschullehrern bis an die Front der Forschung gefolgt ist, sollte in der Lage sein, so simple Probleme wie die Fundierung der elementaren Geometrie oder des Rechnens mit natürlichen Zahlen zu durchschauen. Die Praxis hat gezeigt, daß das leider nicht stimmt.* [12; S. 186]

Da man aber von jedem Mathematiklehrer erwartet, daß er den Aufbau des Zahlensystems kennt bzw. *das Rechnen mit natürlichen Zahlen durchschaut*, stellt sich die Frage, wie dem oben angesprochenen Mißstand abgeholfen werden kann. Mit größerem zeitlichen Aufwand dürfte man eher das Gegenteil erreichen. Aufgrund des Studiums eines zweiten Faches, der Didaktik und der zusätzlich zu belegenden sozialwissenschaftlichen Fächer ist der Stundenplan sowieso schon überfrachtet. Ein Diplomstudent hat mehr Zeit, sich Kernideen und Schlußweisen seines Faches im Sinne natürlichen Lernens selber klarzumachen. Diese sollten jedoch gerade im Interesse der Lehramtskandidaten in den Veranstaltungen stärker herausgearbeitet werden, was selbstverständlich nicht als Freibrief für die Studenten zu verstehen ist. Vielmehr darf das eigene Entdecken dabei nicht zu kurz kommen, denn davon lebt das Mathematikstudium zuallererst.

Der Aufbau des Zahlensystems ist für die Schulmathematik essentiell; daher sollten gerade hier hinsichtlich der wissenschaftlichen Fundierung keine Kompromisse gemacht werden. Am Beispiel des Aufbaus des Zahlensystems sollen im folgenden einige der oben geäußerten Gedanken ausgeführt werden. Als Anregung schlage ich vor, folgende Fragen zu beantworten; um sie wird es im nächsten Abschnitt gehen:

- Was für Gemeinsamkeiten haben die Zahlbereichserweiterungen?
- Sind die Zahlbereichserweiterungen eindeutig? Warum?
- Welche Bedeutung hat die Gültigkeit der Kürzungsregel für die Zahlbereichserweiterungen?
- Warum ist beispielsweise die Addition in $\mathbb{Q}$ nicht anders (villeicht einfacher) definiert?
- Wieso ist minus mal minus plus?
- Was ist ein Epimorphismus? Ist er immer surjektiv? Warum nicht?

2. Gedanken zum Aufbau des Zahlensystems

Die Literatur zum Aufbau des Zahlensystems ist umfangreich. Die Literaturangaben am Ende dieses Artikels stellen eine Auswahl dar. Fragt man nach einem Standardwerk über den Aufbau des Zahlensystems, wird sehr oft das Buch von ARNOLD OBERSCHELP [14] genannt. Studenten, die nach dessen Lektüre daran interessiert sind, die Fülle der Details im Hinblick auf ihr Examen geordnet und *verschlankt* wiedergeben zu können, lesen den zugehörigen Abschnitt in SCHULZ [18].

— Worum geht es bei Zahlbereichserweiterungen?

Zu einer strukturierten Menge M_1 soll eine Menge M_2 mit bestimmten zusätzlichen Strukturmerkmalen konstruiert werden.
Es soll eine Einbettung $\omega : M_1 \longrightarrow M_2$ angegeben werden, durch die wegen $M_1 \cong \omega(M_1)$ dann M_1 mit $\omega(M_1)$ identifiziert wird.
Die Erweiterung M_2 soll (im wesentlichen, d. h. bis auf Isomorphie) eindeutig sein.
Es geht also um eine Art algebraischer Vervollständigung. Im Falle der Konstruktion der reellen Zahlen sogar auch um eine im eigentlichen topologischen Sinne.

— Was haben die Konstruktionen von $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ (und $\mathbb{C}$) gemeinsam?[1]

Es handelt sich durchweg um Konstruktionen, die aus einer Quotientenbildung hervorgehen. An dieser Stelle tauchen in der Regel einige Fragen auf; falls nicht, lohnt es sich, sie aufzuwerfen:
Was gibt es außer Quotienten? Läßt sich eine Quotientenbildung immer durchführen?

[1] An dieser Stelle wird davon ausgegangen, daß die natürlichen Zahlen vom Himmel gefallen sind. Ihre mathematische Begründung soll nicht Gegenstand dieser Überlegungen sein.

Außer Quotienten gibt es Unterobjekte, Produkte und Summen (Coprodukte). Im allgemeinen läßt sich jedoch eine Quotientenbildung nicht immer durchführen. Zumindest in der Algebra muß nach einem Normalteiler oder einem Ideal faktorisiert werden. In der Topologie hingegen ist eine Quotientenbildung immer möglich[2]. (Warum?)
Wenn schon Quotienten nicht immer existieren, wie sieht es mit den anderen Standardkonstruktionen aus? Produkte und Summen existieren in der Algebra und in der Topologie immer, Unterobjekte in der Regel nur in der Topologie. In der Algebra muß schließlich jede Teilmenge, die z. B. als Untergruppe in Frage kommt, das neutrale Element der Verknüpfung der Ausgangsgruppe enthalten.

— Warum sind die Erweiterungen bis auf Isomorphie eindeutig?

Weiter oben wurde festgestellt, daß es sich bei der Frage nach der Eindeutigkeit einer bestimmten Konstruktion um eine mathematische Kernfrage handelt. Um so verwunderlicher, daß sie oft als weniger wesentlich bei Zahlbereichserweiterungen eingestuft zu werden scheint. Jedenfalls kann man bei Betrachtung der meisten Literatur zu diesem Thema diesen Eindruck gewinnen. In [14; S. 141] wenigstens wird das Thema Eindeutigkeit nicht ausgespart:

> *Bei den vorangegangenen Zahlbereichserweiterungen hatte sich immer gezeigt, daß das Resultat der Erweiterung durch gewisse Bedingungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt war.*

Dabei laufen die Eindeutigkeitsbeweise auf die Formel hinaus: Wir nehmen nur das dazu, was wir brauchen, um die gewünschten Struktureigenschaften zu erhalten. Dadurch erhält man eine minimale Erweiterung, in der sich dann auch gewisse Gleichungen lösen lassen. So wird aber im wesentlichen in der Schule argumentiert.

Im folgenden soll eine durchaus bekannte Methode favorisiert werden, die alle Eindeutigkeitsfragen bei Zahlbereichserweiterungen mit einem Mal vom Tisch wischt und darüber hinaus noch bei sehr vielen anderen Konstruktionen in der Mathematik Eindeutigkeit garantiert. Es handelt sich um ein wichtiges Prinzip, nicht nur der reinen Mathematik: um die eindeutige Fortsetzbarkeit von strukturerhaltenden Abbildungen. Beste Beispiele sind die Darstellbarkeit linearer Abbildungen durch Matrizen in der Linearen Algebra, bekanntlich über einen Fortsetzungssatz gesichert, oder der Homomorphiesatz der Gruppen– bzw. Ringtheorie. Die üblichen Zahlbereichserweiterungen erfüllen alle eine universelle Abbildungseigenschaft. Durch diese Eigenschaft der eindeutigen Fortsetzbarkeit auf die Erweiterung sind die Erweiterungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Dieses Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit durchzieht die Mathematik. Daher sollte es wann immer möglich herausgearbeitet werden. Für die üblichen Zahlbereichserweiterungen soll dies im folgenden geschehen.

[2] An dieser Stelle könnte darauf hingewiesen werden, daß gerade das der Hauptunterschied zwischen Algebra und Topologie ist.

Es erscheint mir an dieser Stelle nicht wichtig, Beweise aus der mathematischen Fachliteratur ([13], [17]) zu wiederholen und auszuführen, vielmehr ist mir daran gelegen, am Beispiel der Erweiterung der Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ zur abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ zu verdeutlichen, wie sich die universelle Eigenschaft der Erweiterung konkret nachweisen läßt. Der darauffolgende Eindeutigkeitsbeweis ist unabhängig von diesem Beispiel und gilt für alle nur denkbaren Konstruktionen, die eine universelle Eigenschaft haben.
Im folgenden sei $(\mathbb{Z}, +_\sim) := \Big((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim, +_\sim\Big)$ die zur Äquivalenzrelation $\sim$, definiert durch

$$(a, b) \sim (c, d) \;:\Longleftrightarrow\; a + d = c + b,$$

gehörige Differenzengruppe (vgl. Quotientenkörper) und ω die zugehörige natürliche bzw. kanonische[3] (natürlich, weil universell!) Abbildung von $(\mathbb{N}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +_\sim)$, definiert durch $\omega(n) = (n, 0)$. Es gilt folgender

Satz 1 *Sei f ein (Halbgruppen–) Homomorphismus von $(\mathbb{N}, +)$ in eine abelsche Gruppe $(G, \oplus)$. Dann gibt es genau einen (Halbgruppen–) Homomorphismus $\overline{f}$, so daß $\overline{f} \circ \omega = f$ gilt, d. h. so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{N}, +) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\omega"'] & & (G, \oplus) \\
& (\mathbb{Z}, +_\sim) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Definiere $\overline{f}$ wie folgt: $\overline{f}\Big((a, b)\Big) := f(a) \oplus f(b)^{-1}$. Dann ist $\overline{f}$ eine Abbildung und darüber hinaus ein (Halbgruppen–) Homomorphismus, wegen:

$$\begin{aligned}
\overline{f}\Big((a, b) +_\sim (c, d)\Big) &= \overline{f}\Big((a + c, b + d)\Big) \\
&= f(a + c) \oplus f(b + d)^{-1} \\
&= f(a) \oplus f(b)^{-1} \oplus f(c) \oplus f(d)^{-1} \;=\; \overline{f}\Big((a, b)\Big) \oplus \overline{f}\Big((c, d)\Big).
\end{aligned}$$

Außerdem macht $\overline{f}$ das Diagramm kommutativ: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

[3]In [2; S. 62 f.] heißt es dazu: *Das Wort* kanonisch *wird für ein Objekt gebraucht, von dessen Sorte es zwar viele gibt, das aber aus seinen Artgenossen so deutlich herausragt, daß es in gewissem Sinne eindeutig ist. Sie merken: Dieser Begriff ist schwammig — und wenn man ganz genau hinsieht zerläuft er einem unter den Fingern. (...) Meine Meinung:* Kanonisch *ist ein Wort, das fast keine Bedeutung hat. (...) Ich konzediere gerne, daß es Gebiete der Mathematik und Informatik gibt, in denen der Begriff* kanonisch *eine präzis benennbare Bedeutung hat. Dann kann man dieses Wort selbstverständlich ohne Gefahr benutzen. Ähnlich wie* kanonisch *wird manchmal auch das Wort* natürlich *gebraucht. Hier müssen Sie natürlich die entsprechenden Vorsichtsmaßnahmen ergreifen.*

$$\overline{f} \circ \omega(n) = \overline{f}\Big((n,0)\Big) = f(n) \oplus f(0)^{-1} = f(n) \oplus e_G = f(n)\,.$$

Es bleibt, die Eindeutigkeit[4] von $\overline{f}$ nachzuweisen. Ist $\overline{\overline{f}}$ ein weiterer (Halbgruppen–) Homomorphismus mit $f = \overline{f} \circ \omega = \overline{\overline{f}} \circ \omega$ und $(a,b) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ dann gilt: $\overline{f}\Big((a,b)\Big) = \overline{\overline{f}}\Big((a,b)\Big)$, also $\overline{f} = \overline{\overline{f}}$:

$$\begin{aligned}
\overline{f}\Big((a,b)\Big) &= \overline{f}\Big((a,0) +_\sim (0,b) +_\sim (0,0)\Big) \\
&= \overline{f}\Big((a,0)\Big) \oplus \overline{f}\Big((0,b)\Big) \oplus \overline{f}\Big((0,0)\Big) \\
&= \overline{\overline{f}}\Big((a,0)\Big) \oplus \overline{f}\Big((0,b)\Big) \oplus \overline{\overline{f}}\Big((0,0)\Big) \\
&= \overline{\overline{f}}\Big((a,0)\Big) \oplus \overline{f}\Big((0,b)\Big) \oplus \overline{\overline{f}}\Big((b,0)\Big) \oplus \overline{\overline{f}}\Big((0,b)\Big) \\
&= \overline{\overline{f}}\Big((a,0)\Big) \oplus \overline{f}\Big((0,b)\Big) \oplus \overline{f}\Big((b,0)\Big) \oplus \overline{\overline{f}}\Big((0,b)\Big) \\
&= \overline{\overline{f}}\Big((a,0)\Big) \oplus \overline{f}\Big((b,b)\Big) \oplus \overline{\overline{f}}\Big((0,b)\Big) \\
&= \overline{\overline{f}}\Big((a,0)\Big) \oplus \overline{\overline{f}}\Big((0,0)\Big) \oplus \overline{\overline{f}}\Big((0,b)\Big) \qquad = \overline{\overline{f}}\Big((a,b)\Big) \qquad \square
\end{aligned}$$

Dieses Resultat gibt Anlaß zu einigen Bemerkungen, die ganz bewußt ausführlich gehalten sind. Zunächst jedoch gibt das letzte Argument des Beweises Anlaß zu folgender

Definition 1 Eine strukturerhaltende Abbildung $f : A \longrightarrow B$ zwischen zwei Objekten (z. B. zwischen zwei Halbgruppen [s.o.] oder zwischen zwei abelschen Gruppen etc.) wird *Epimorphismus* genannt, falls für jedes Paar von strukturerhaltenden Abbildungen (h,k) von B nach C mit $h \circ f = k \circ f$ stets $h = k$ folgt.

In obigem Beweis ist also gezeigt worden, daß ω ein (Halbgruppen–) Epimorphismus ist. Diese Überlegung wird in Bemerkung 2 erneut aufgegriffen.

Bemerkung 1 Satz 1 gilt auch allgemein. Anstelle von $(\mathbb{N}, +)$ kann jede kommutative Halbgruppe zugrunde gelegt werden, in der die Kürzungsregel gilt. Die Kürzungsregel wird benutzt, um zu zeigen, daß $\sim$ transitiv ist. Außerdem ist ω genau dann injektiv, wenn in der kommutativen Halbgruppe die Kürzungsregel gilt. Die Voraussetzung ist also notwendig, um eine Einbettung zu erhalten! In [14; S. 56 f.] wird die Kürzungsregel [Regularität] der kommutativen Halbgruppe benutzt, um die Injektivität der Abbildung ω zu zeigen. Das diese Bedingung aber auch notwendig ist, wird an dieser Stelle nicht erwähnt. Stattdessen wird die Aufmerksamkeit auf einen Nebenschauplatz gelenkt. Durch die Einführung zweier

[4] Später wird ein einfacheres und sehr kurzes Argument benutzt, das sich aus dem folgenden, absichtlich ausführlich gehaltenen Beweis herauslesen läßt.

sicherlich bildliches Verständnis anregender Begriffe wie *Wegwerfmethode* und *Transplantationsmethode* soll verständlich gemacht werden, wie man zu einer *wirklichen Einbettung* kommt [14; S. 56]. Das hat zwar zur Folge, daß man sich des Identifizierungsproblems bewußt wird, lenkt aber den Blick auf den in diesem Kontext unwichtigeren Sachverhalt[5].
Weitere Beispiele dieses allgemeinen Verfahrens der Erweiterung einer kommutativen Halbgruppe mit Kürzungsregel zu einer Gruppe sind $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ als Erweiterung von $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ als Erweiterung von $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ als Erweiterung von $(\mathbb{Q}^+, +)$.

Bemerkung 2 Weiter oben haben wir bemerkt, daß ω ein Epimorphismus ist. Es ist also einzig und allein die Eigenschaft von ω, epimorph zu sein, die garantiert, daß $\overline{f}$ eindeutig bestimmt ist. Allerdings ist ω offenbar nicht surjektiv. Diese Tatsache löst selbst bei vielen Diplommathematikern Verwunderung aus, glauben sie doch im ersten Semester gelernt zu haben, daß ein Epimorphismus genau ein surjektiver Homomorphismus ist. Legt man Vektorräume oder (abelsche) Gruppen für die Homomorphismen zugrunde, stimmt die Charakterisierung auch. Im Rahmen von Halbgruppen oder Ringen jedoch ist sie falsch[6], obwohl ein *surjektiver Homomorphismus* natürlich ein Epimorphismus ist. Man ist vielleicht geneigt zu sagen, dies sei reine Definitionssache, Epis seien in aller Regel eben nicht so definiert wie in Definition 1. Ein genauer Blick jedoch in die Literatur zur Linearen Algebra verrät, daß dort im allgemeinen nur steht: *Ein surjektiver Homomorphismus wird manchmal auch Epimorphismus genannt.* Oft wird auch ausdrücklich von linearen Abbildungen als Homomorphismen gesprochen, also im Kontext von Vektorräumen argumentiert.
So oder so, dies sorgt für Verwirrung. Es ist daher zu überlegen, entweder auf das Wort Epimorphismus zunächst zu verzichten und von surjektiven Homomorphismen zu sprechen oder aber eine ausdrückliche Warnung auszusprechen, daß der Kontext die Definition eines Epimorphismus als surjektiven Homomorphismus ermöglicht. Auf der anderen Seite sollte einem angehenden Mathematiker die Definition 1 guten Gewissens zugemutet werden können, zumal zu Quotienten schließlich Epis (im Sinne von Def. 1) gehören!
Wer sich wundert, wozu dieser ganze Ärger mit den Abbildungen nötig sei, sei auf die folgende Bemerkung verwiesen.

Bemerkung 3 Bruchrechnung ist für viele Schüler zumindest gewöhnungsbedürftig. Gerade die Addition zweier Brüche erfreut sich keiner besonderen Beliebtheit. Aus diesem Grund gibt es viele Veröffentlichungen darüber, wie sie Schülern am besten beizubringen sei. Exemplarisch seien an dieser Stelle [10 und 15] genannt. MESCHKOWSKI folgend, sollen Lehrer wissen, warum die Addition in $\mathbb{Q}$ gerade wie üblich und nicht schülergerechter

[5]Das Problem der Identifizierung ist zweifelsohne von besonderer mathematischer Wichtigkeit und sollte als Standardmethode auch ausführlich besprochen werden. Taucht es in diesem Zusammenhang zum ersten Mal auf, sollte zumindest der Hinweis auf die Notwendigkeit der Kürzungsregel nicht fehlen.

[6]HAUSDORFFsche topologische Räume sind ein weiteres Beispiel dafür, daß ein Epi nicht surjektiv sein muß. Die Einbettung $i : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein Beispiel, da stetige Abbildungen in HAUSDORFFsche Räume bereits durch ihre Auswertung auf $\mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt sind.

definiert ist. Daß die benutzte Definition sinnvoll ist, zeigt die tägliche Erfahrung. Doch sie ist kein *Naturgesetz*, sondern mathematisch beweisbar.
Auf der Menge $\mathbb{Z}$ sind Addition und Multiplikation erklärt. Addition und Multiplikation im Quotientenkörper $\mathbb{Q}$ (zum Integritätsring $\mathbb{Z}$) sind so erklärt, daß die zugehörige natürliche Abbildung ω ein (Ring–) Homomorphismus ist, also die algebraischen Verknüpfungen geeignet überträgt. Ginge das denn nicht auch anders? Nein, die Definitionen

$$\frac{a}{b} \ +_\sim \ \frac{c}{d} := \frac{ad\,+\,cb}{bd} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} \ \cdot_\sim \ \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$$

stellen die einzige Möglichkeit dar, $(\mathbb{Q}, +_\sim, \cdot_\sim)$ zu einem Körper und ω zu einem (Ring–) Homomorphismus zu machen. Die obigen Definitionen sind also notwendig. Fragt sich nur, wo das bewiesen wird. In den allermeisten Büchern wird nur nachvollzogen, daß die obigen Definitionen hinreichend sind. Mit Hilfe der Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$ geben wir für die Notwendigkeit der Definition der Addition einen

Beweis: Da die Kürzungsregel gilt, folgt aus $\frac{a}{b} \ +_\sim \frac{c}{d} \neq \frac{ad+cb}{bd}$, daß

$$\tfrac{bd}{1} \cdot_\sim \left(\tfrac{a}{b} \ +_\sim \ \tfrac{c}{d}\right) \neq \tfrac{ad+cb}{1}$$

gilt. Da die Definitionen einen Körper beschreiben sollen, gilt: $\frac{ad}{1} +_\sim \frac{cb}{1} \neq \frac{ad+cb}{1}$, was nur möglich ist, falls ω kein Ringhomomorphismus ist. □

Bemerkung 4 In unserem Beispiel haben wir bisher nur $(\mathbb{N}, +)$ zu $(\mathbb{Z}, +)$[7] erweitert. In Wirklichkeit ist aber auf $\mathbb{N}$ noch eine Multiplikation definiert, die $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ einen Halbring sein läßt. Auf der Differenzengruppe $(\mathbb{Z}, +)$ des additiven Monoids $(\mathbb{N}, +)$ ist durch

$$(a, b) \cdot_\sim (c, d) \ := \ (ac + bd, ad + bc)$$

eine Multiplikation wohldefiniert. Sie ist (wiederum) die einzige Multiplikation auf $(\mathbb{Z}, +)$ derart, daß $\omega : (\mathbb{N}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot_\sim)$ multiplikativ und $(\mathbb{Z}, +, \cdot_\sim)$ ein Ring ist (Beweis!). Der so definierte Ring heißt Differenzenring zum Halbring $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. Analog zur Differenzengruppe schließt man auf die universelle Eigenschaft der Erweiterung. (Offenbar ist die Fortsetzung $\overline{f}$ auch multiplikativ) [vgl. 17; S. 12].
Ist es beim Quotientenkörper die Addition, die *ungewohnt*, d. h. nicht komponentenweise definiert ist, so ist es beim Differenzenring die Multiplikation. Nun läßt sich aber nachweisen, warum minus mal minus plus ist. Während ein guter Lehrer seinen Schülern auf die Frage nach einem Beweis für diese Tatsache vielleicht mit folgender Zeile antwortet[8]

$$0 = (-1) \cdot 0 = (-1) \cdot (1 - 1) = (-1) \ ? \ (-1)(-1)\,,$$

nehmen wir an der Hochschule zwei beliebige Repräsentanten (z. B. $(a, a+1)$ und $(b, b+1)$) her und verknüpfen sie nach der eben definierten Multiplikation miteinander.

[7] Aus diesem Grund schreiben wir statt $+_\sim$ in diesem Falle schon $+$.
[8] Es wird angenommen, daß die Schüler das Distributivgesetz kennen.

Im letzten Absatz von Abschnitt 2 haben wir behauptet, die Eigenschaft eindeutiger Fortsetzbarkeit genüge, um die Einzigkeit der Erweiterung nachzuweisen. Dieses Resultat werden wir nun formulieren (ohne dabei die von einigen ungeliebte Sprache der Kategorientheorie zu benutzen) und, obwohl es hinlänglich bekannt ist, an dieser Stelle beweisen; wiederum für unser Beispiel der speziellen Differenzengruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

Satz 2 *Durch die universelle Eigenschaft von $(\mathbb{Z}, +)$ ist $(\mathbb{Z}, +)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, d.h. jede andere Erweiterung zu einer abelschen Gruppe mit dieser Eigenschaft ist zu $(\mathbb{Z}, +)$ isomorph.*

Beweis: Nach Voraussetzung existiert für jeden (Halbgruppen–) Homomorphismus f von $\mathbb{N}$ in eine abelsche Gruppe G eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\overline{f}$ von f, so daß $\overline{f} \circ \omega = f$ gilt. Erfüllt auch G eine universelle Eigenschaft, so existiert eine eindeutige Fortsetzung $\overline{\omega}$ auf G , so daß auch

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "\omega"] \arrow[r, "f"'] & G \arrow[u, "\overline{\omega}"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann kommutiert aber auch das zusammengesetzte Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "\omega"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\omega"'] & G \arrow[u, "\overline{\omega}"'] \\ & \mathbb{Z} \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Also gilt $\omega = \overline{\omega} \circ \overline{f} \circ \omega$. Andererseits ist das Diagramm vermöge $\omega = 1_{\mathbb{Z}} \circ \omega$ kommutativ. Aus der Eindeutigkeit folgt $\overline{\omega} \circ \overline{f} = 1_{\mathbb{Z}}$. Für das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & G \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[u, "\overline{f}"'] \\ & G \arrow[u, "\overline{\omega}"'] \end{tikzcd}$$

erhält man analog $1_G = \overline{f} \circ \overline{\omega}$. Daher gilt $G \cong \mathbb{Z}$, und $\mathbb{Z}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. $\square$

Bemerkung 5 Offenbar ist der obige Beweis von der speziellen Erweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ unabhängig. Entscheidend war die Eindeutigkeit der Fortsetzungsabbildung. Wir haben somit festgestellt, daß unsere Konstruktion durch die Eigenschaft, eine universelle Abbildungseigenschaft zu erfüllen, (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist. Wir können im Wissen um eine solche Eigenschaft fortan also guten Gewissens sagen, die Eindeutigkeit der entsprechenden Konstruktion sei klar.

Wir werden feststellen, daß auch andere Zahlbereichserweiterungen solch eine Eigenschaft erfüllen. Über die Erweiterung von den natürlichen zu den ganzen Zahlen haben wir bereits ausführlich gesprochen. Da für uns die Eindeutigkeit der Konstruktionen auf Grundlage eindeutiger Fortsetzbarkeit im Vordergrund steht, beschränken wir uns im folgenden darauf.

Satz 3 *R sei ein Integritätsring und $Q(R)$ der dazugehörige Quotientenkörper. Durch $\omega : R \longrightarrow Q(R)$ wird vermöge $\omega(r) := (r, 1)$ ein injektiver Ringhomomorphismus definiert. Ist K ein Körper und $f : R \longrightarrow K$ ein injektiver Ringhomomorphismus, so gibt es genau einen Rinhomomorphismus $\overline{f} : Q(R) \longrightarrow K$ mit $\overline{f} \circ \omega = f$. Durch diese Eigenschaft ist $Q(R)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Bemerkung 6 Der Quotientenkörper $\mathbb{Q} := Q(\mathbb{Z})$ ist ein Beispiel. Die Fortsetzung $\overline{f}$ wird ähnlich wie in Satz 1 definiert, wobei das Inverse bzgl. der Multiplikation gebildet werden muß. Das ist übrigens der Grund dafür, warum f in obigem Satz als injektiv vorausgesetzt wurde (vgl. [9; S. 127]).
Ähnlich wie im Beweis zu Satz 1 weist man nach, daß ω ein nichtsurjektiver (Ring–) Epimorphismus ist. Letztere Tatsache ist erneut ausschlaggebend für die Eindeutigkeit von $\overline{f}$.
Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß in [3; S. 60 ff.] $\mathbb{Q}^+$ als Halbkörper der gebrochenen Zahlen konstruiert wird.

Die Konstruktion der reellen Zahlen ist auf zwei verschiedene Arten möglich. Das erste Verfahren verwendet Dedekindsche Schnitte. Diese Methode rührt aus der Unvollständigkeit der Ordnungsstruktur von $\mathbb{Q}$ her. Betrachtet man bei dieser Konstruktion ein Fortsetzungsproblem, so stellt sich heraus, daß die Fortsetzung $\overline{f}$ einer injektiven isotonen Abbildung f auf $\mathbb{R}$ nicht eindeutig zu sein braucht! (z. B. [16; S. 59]). Aus diesem Grund ist das zweite, auf Cantor zurückgehende, Verfahren *natürlicher*. In diesem Verfahren wird die topologische Struktur von $\mathbb{Q}$ mit Hilfe von Cauchy Folgen vervollständigt. Es ist nicht notwendig, bei dieser Vervollständigung auch von der algebraischen Struktur oder der Ordnungsstruktur von $\mathbb{Q}$ Gebrauch zu machen. Aus der Konstruktion der vollständigen Hülle von $\mathbb{Q}$ ergibt sich schließlich die universelle Eigenschaft von ω, der Abbildung $\mathbb{Q} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}} := \{[(x_n)] \mid (x_n)$ ist Cauchy Folge in $\mathbb{Q}\}$, die jeder rationalen Zahl q die Äquivalenzklasse $[(q_n)]$ (mit $q_n = q$ für alle $n \in \mathbb{N}$) ihrer (konstanten) Cauchy Folge zuordnet. Zwei Cauchy Folgen (p_n) und (q_n) in $\mathbb{Q}$ heißen dabei äquivalent, wenn $\lim(p_n - q_n) = 0$ ist. Für die eindeutige Fortsetzung wesentlich ist folgender

Satz 4 *Jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : A \longrightarrow Y$ von einem dichten Unterraum A eines metrischen Raumes X in einen vollständigen metrischen Raum Y läßt sich eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $\overline{f} : X \longrightarrow Y$ fortsetzen.*

Bemerkung 7 Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [7; 3.2.3]. Zu beachten ist dabei, daß $\mathbb{Q}$ dicht in $\overline{\mathbb{Q}}$ ist. Vermöge der Definitionen

$$[(p_n)] +_{\sim} [(q_n)] := [(p_n + q_n)] \quad \text{und} \quad [(p_n)] \cdot_{\sim} [(q_n)] := [(p_n \cdot q_n)]$$

wird $\overline{\mathbb{Q}} := \mathbb{R}$ zu einem Körper und ω zusätzlich zu der gleichmäßigen Stetigkeit ein (Körper–) Homomorphismus, so daß schließlich gilt:
Ist $f : \mathbb{Q} \longrightarrow K$ ein injektiver gleichmäßig stetiger Körperhomomorphismus in einen vollständigen Körper K, so existiert genau ein gleichmäßig stetiger Körperhomomorphismus $\overline{f}$, so daß $\overline{f} \circ \omega = f$ ist.
Die Fortsetzung wird auf den Äquivalenzklassen, der nicht in $\mathbb{Q}$ konvergenten CAUCHY Folgen wie folgt definiert: Ist (x_n) eine in $\mathbb{Q}$ nicht konvergente CAUCHY Folge, so konvergiert in K die CAUCHY Folge $(f(x_n))$ gegen einen Punkt k. Man setzt dann $\overline{f}([x_n]) := k$.

3. Diskussion

> *Wir sind in den Staatsprüfungen immer wieder überrascht, wie schmal die Basis an Erkenntnissen und Fähigkeiten ist, über die ein Kandidat am Ende seines Studiums tatsächlich verfügt. (...) Wer (...) etwa die Konstruktion der reellen Zahlen einmal sorgfältig studiert hat, für den ist es mehr als eine Gedächtnislücke, wenn er behauptet, eine solche Zahl sei „eine konvergente Folge rationaler Zahlen“ (...). Und wenn er dann nicht einmal auf das Stichwort „Äquivalenz?“ reagiert, liegt der Verdacht auf mangelnde Sorgfalt nahe. (...) Dann erfährt man einiges über die Effektivität von Lehrveranstaltungen und bekommt das starke Bedürfnis, sich darum schon vor Ort zu kümmern.* [6; S. 261]

Kernideen und wiederkehrende Schlußweisen in der Mathematik können durch Strukturbetrachtungen erarbeitet werden. Zu Strukturbetrachtungen führt HANS–JOACHIM VOLLRATH aus:

> *Es ist ökonomischer, derartige Prozesse[9] einmal allgemein durchzuführen, dann muß man sie nicht für jeden Bereich wieder neu durchführen. Für die Wissenschaft ist dies zutreffend.*

Und darum ging es ja hier: um die wissenschaftliche Begründung des Zahlensystems. Etwas weiter heißt es:

> *Strukturbetrachtungen an konkreten Beispielen können also für Lernende durchaus einen wichtigen Beitrag zum Verstehen leisten.* [20; S. 17]

[9] Er bezieht sich dabei auf die Bildung des Quotientenkörpers und die Adjunktion eines algebraischen Elements an einen Körper.

Nun war es keineswegs das Ziel, jemandem das *Bourbakische Korsett* aufzuzwingen. Es ging auch nicht darum, eine strukturelle Betrachtungsweise an der Hochschule durchzusetzen, sondern durch eine andere Akzentsetzung in manchen Punkten mathematische Ideen vermittelbarer werden zu lassen. Das kann sowohl durch strukturelle Überlegungen geschehen (vgl. eindeutige Fortsetzbarkeit) als auch durch gezielte Hinweise auf wichtige Details, wie zum Beispiel auf die Kürzungsregel in Bemerkung 1 oder auch auf den Nachweis der Notwendigkeit der Definition der Addition in $\mathbb{Q}$. Insofern ist mathematische *Fummelarbeit* unerläßlich und nützlich. Allerdings kann es dabei passieren, sich im Detailgeflecht zu *verheddern*. Dann kommt es vor, daß sich Dinge einprägen, mit denen man sich stundenlang beschäftigt hat, die aber eher unwichtig sind. So konnte ich beispielsweise in einem Tutorium erleben, für wie wichtig der Nachweis der Transitivität der Äquivalenzrelation genommen wurde, mit deren Hilfe man den Quotientenkörper konstruiert. Beim Rechnen einer Übungsaufgabe hatte es an dieser Stelle Probleme gegeben. Froh, nach einiger Zeit die Lösung gefunden zu haben, hielten die Studenten diese dann für bedeutsam.

In diesen Zusammenhang paßt ein weiteres Problem, das ich bei Vorbereitungen von Studenten auf das schriftliche Staatsexamen beobachten konnte. Es wird sichtbar, wenn immer aufs Neue dieselben Aufgabentypen (z.B. Bestimmung von Eigenwerten, Eigenraum etc. (...)) durchgerechnet werden und die Freude groß ist, falls man darin schneller ist als die meisten Diplommathematiker. Vielleicht ist dieses Phänomen Ausdruck tiefer Verunsicherung unter denjenigen, die aus dem Glauben (Wissen) an (um) die eigene mathematische Unzulänglichkeit versuchen, auf diesem Weg zum Erfolg zu kommen, was dann nicht selten auch gelingt. Man kann nur hoffen, daß diese *Erfolgsformel* dann später an der Schule nicht an die Schüler weitergegeben wird. Denn bittet man einmal jemanden, über die wesentliche mathematische Idee oder Voraussetzung, die hinter seiner Rechnung steckt, Auskunft zu geben, ist er hilflos. Ähnliches läßt sich beobachten, wenn man sich eine wiederkehrende Eigenschaft *definieren* lassen will.

Es ist gezeigt worden, wie Strukturüberlegungen einen sinnvollen Beitrag zum Verständnis leisten können. Auf keinen Fall sollten sie Selbstzweck sein. Erfreulich wäre es, wenn sie sinnfällige innermathematische Anwendungen hätten. Doch es wäre schon Anwendung genug, fallls sich durch sie gelegentlich Motivation erzeugen ließe. Diese Erfahrung konnte ich mit der Feststellung machen, daß die Fortsetzungssätze von HAHN–BANACH aus der Funktionalanalysis und von TIETZE–URYSOHN aus der Topologie von einem (zugegeben sehr hohen) abstrakten Standpunkt aus betrachtet, (im wesentlichen) nicht zu unterscheiden seien (vgl. [AHS; 9.3 (4)(a) und (5)]). Das mag ein bißchen weit hergeholt klingen und wird natürlich den konkreten Ergebnissen nicht gerecht. Strukturelle Anregungen, insbesondere die ausgeführten Überlegungen zum Zahlensystem, laden Studenten aber dazu ein,

1. die Ergebnisse (erneut) zu reflektieren,
2. sich der Gemeinsamkeiten mancher mathematischer Konstruktionen zu vergewissern und dabei andere wichtige Details (wieder) zu entdecken,
3. nach weiteren Beispielen zu suchen und sich auf diese Weise den Weg zu ebnen, sich mit anderen Gebieten der Mathematik auseinanderzusetzen.

Schließlich vermitteln sie

4. ein fürs Lernen motivierendes Gefühl der Geordnetheit bzw. Überschaubarkeit.

Zudem kann eine strukturelle Betrachtungsweise durchaus auch zu Detailarbeit anregen (vgl. dazu insbesondere die Bemerkungen 1, 3 und 4).

Die wirklichen *Aha*–Erlebnisse stellen sich ohnehin erst nach intensiver selbständiger Beschäftigung mit der Sache ein. Der Dozent jedoch kann den Studenten dabei einen Schritt entgegen kommen, KL 27 123 finden sie dann selber.

Literatur

1. Adámek, J., Herrlich, H. und Strecker, G. E., *Abstract and Concrete Categories*, Wiley–Intersci. Publ., New York **1990**.
2. Beutelspacher, A.: *„Das ist o. B. d. A. trivial“*, Vieweg, **1991**.
3. Denecke, K. und Todorov, K.: *Algebraische Grundlagen der Arithmetik*, Heldermann, **1994**.
4. Dienes, Z. P.: *Schulmathematik als Bildungsfach*, Herder, **1967**.
5. Forster, O.: *Analysis 1*, Vieweg, 4. Aufl. **1983**.
6. Germer, H.: *Prüfungen* in: Didaktik der Mathematik IV (Hrsg. Meschkowski, H. und Laugwitz, D.), Klett, **1974**, 252–276.
7. Herrlich, H.: *Einführung in die Topologie*, Heldermann, **1986**.
8. Heuser, H. und Tillmann, H. G. (Ltg.): *Lehrgang Moderne Mathematik*, Bearbeitete Neuausgabe der Studienbegleitbriefe zum Funkkolleg Mathematik, Band 2, Beltz, **1974**.
9. Kasch, F. und Pareigis, B.: *Grundbegriffe der Mathematik*, VUD München, 2. Aufl. **1978**.
10. Köhler, H.: *Situationen beim Bruchrechnen im 6. Schuljahr Gymnasium*, mathematik lehren **64 (1994)**, 47–50.

11. Meschkowski, H.: *Bildungsaufgaben im modernen mathematischen Studium* in: Didaktik der Mathematik IV (Hrsg. Meschkowski, H. und Laugwitz, D.), Klett, **1974**, 24–41.

12. Meschkowski, H.: *Lehrerbildung* in: Didaktik der Mathematik IV (Hrsg. Meschkowski, H. und Laugwitz, D.), Klett, **1974**, 186–194.

13. Meyberg, K.: Algebra Teil 1 und 2, Hanser, 2. Aufl. **1980** und **1976**.

14. Oberschelp, A.: *Aufbau des Zahlensystems*, Vandenhoeck & Ruprecht, 3. Aufl. **1976**.

15. Padberg, F.: *Didaktik der Bruchrechnung*, Spektrum, 2. Aufl. **1995**.

16. Reinhardt, F. und Soeder, H.: *dtv–Atlas zur Mathematik Band I*, dtv, 6. Aufl. **1984**.

17. Scheja, G. und Storch, U.: *Lehrbuch der Algebra Teil 2*, Teubner, **1988**.

18. Schulz, R.–H.: *Repetitorium der Mathematik*, Vieweg, **1994**.

19. Titze, H., Walter, H. und Feuerlein, R.: *Algebra 1*, bsv München, 8. Aufl. **1982**.

20. Vollrath, H.–J.: *Strukturelles Denken im Algebraunterricht*, Der Mathematik Unterricht **40**, Heft 4 (1994), 5–25.