UNZERLEGBARE BANACHRÄUME

ÜBER DIE ARBEITEN VON W. T. GOWERS

DIRK WERNER

1. Einleitung

Im letzten Jahr erhielt W. Timothy Gowers auf dem ICM in Berlin die Fieldsmedaille, die ja so etwas wie der Nobelpreis für Mathematiker ist. In der Begründung wurden insbesondere seine Forschungen in der Banachraumtheorie hervorgehoben, wo er beinahe 70 Jahre alte Probleme wie das Problem der unbedigten Basisfolgen, das Hyperebenenproblem und das Problem der homogenen Räume gelöst hat, die bislang fast als unangreifbar galten.

Es ist das Ziel dieses Vortrags, Gowers' Leistungen auf diesem Gebiet darzustellen; dabei werden die Grundbegriffe der Funktionalanalysis als bekannt vorausgesetzt, alle weiteren Begriffe werden im Laufe des Texts entwickelt. Bisweilen wird unter „Banachraum" implizit „unendlichdimensionaler Banachraum" verstanden, um einige Formulierungen abzukürzen. Ebenso bedeutet „Unterraum" gelegentlich implizit „abgeschlossener Unterraum".

2. Schauderbasen

Seit dem Erscheinen von Banachs Buch *Théorie des opérations linéaires* im Jahre 1932 [1] stand die strukturelle Untersuchung der Banachräume unter verschiedenen Leitfragen, wie z.B.

- *Ist ein Banachraum aus „einfachen" Unterräumen zusammengesetzt?*
- *Besitzt ein Banachraum überhaupt „einfache" Unterräume?*
- *Kann man auf einem Banachraum „nichttriviale" Operatoren definieren?*

Was hier „einfach" und „nichttrivial" bedeuten soll, bleibt einstweilen der Interpretation ausgesetzt. Die von Tim Gowers zwischen 1991 und 1993 erzielten Resultate lassen jedoch den Schluß zu, daß unter praktisch jeder denkbaren Interpretation von „einfach" die Antwort *nein* lautet. Das bedeutet nicht, daß ein allgemeiner Banachraum strukturlos ist – im Gegenteil hat Gowers eine vollkommen neue Struktur entdeckt, die zu positiven Lösungen klassischer Probleme führt (siehe Abschnitte 6 und 7).

Um die Ergebnisse von Gowers zu beschreiben, benötigen wir einige Vokabeln. Die erste ist die einer Schauderbasis (benannt nach J. Schauder).

Vortrag, gehalten am 2. Dezember 1999 im Studentenkolloquium des Fachbereichs Mathematik der FU Berlin.

Definition 2.1. Eine *Schauderbasis* eines Banachraums X ist eine Folge $e_1, e_2, \dots$ in X, so daß sich jedes $x \in X$ eindeutig als Reihe

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{2.1}$$

darstellen läßt.

Dieses Konzept verallgemeinert offenbar das einer Orthonormalbasis eines Hilbertraums, wo (2.1) mit $a_n = \langle x, e_n \rangle$ gilt.

Die *Einheitsvektoren* $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, wo die 1 an der n-ten Stelle steht, bilden eine Schauderbasis in den Folgenräumen ℓ_p, $1 \le p < \infty$, und c_0. Das *trigonometrische System*

$$e_1(t) = 1,\ e_2(t) = e^{it},\ e_3(t) = e^{-it},\ e_4(t) = e^{2it},\ e_5(t) = e^{-2it},\ \dots$$

bildet eine Schauderbasis in den Funktionenräumen $L_p[0, 2\pi]$, wenn $1 < p < \infty$ ist, nicht jedoch in $L_1[0, 2\pi]$ oder $C[0, 2\pi]$. Letzteres ist dem Umstand geschuldet, daß die Fourierreihe einer L_1-Funktion (bzw. stetigen Funktion) nicht in der Norm von L_1 (bzw. gleichmäßig) zu konvergieren braucht. Aber auch diese Räume besitzen Schauderbasen; für $C[0, 2\pi]$ kann man z.B. das (zu diesem Zweck von Schauder konstruierte) Schaudersche Funktionensystem wählen.

Die Existenz einer Schauderbasis bedeutet für einen Banachraum, daß dieser aus eindimensionalen Räumen zusammengesetzt werden kann. Folgende allgemeine Sätze gelten (siehe [18, Th. 1.a.5 und Sect. 1.e]):

Theorem 2.2.

(a) (Mazur ca. 1932)
Jeder Banachraum besitzt einen abgeschlossenen Unterraum, der eine Schauderbasis hat.

(b) (Enflo 1973)
Es gibt einen separablen Banachraum ohne Schauderbasis.

Versteht man unter „einfach“ die Existenz einer Schauderbasis, lautet daher die Antwort auf die zweite oben aufgeworfene Frage *ja*. Diese Antwort ist nun etwas zu einfach! Für viele Untersuchungen ist die bloße Konvergenz in (2.1) nämlich zu schwach; man benötigt die unbedingte Konvergenz.

Definition 2.3. Eine Reihe in einem Banachraum heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede Umordnung ebenfalls konvergiert. Eine Schauderbasis (e_n) heißt *unbedingte Basis*, wenn (2.1) unbedingt konvergiert.

Die Einheitsvektoren bilden z.B. eine unbedingte Basis in ℓ_p und c_0, aber das trigonometrische System ist nur in L_2 eine unbedingte Basis. Hingegen besitzen die Räume L_p auch für $1 < p < \infty$ unbedingte Basen (z.B. das Haarsche Funktionensystem oder andere Wavelet-Basen), aber L_1 und C schneiden erneut schlechter ab, denn diese Räume besitzen keine unbedingte Basen (Pełczyński 1961).

Für das Studium unbedingt konvergenter Reihen ist es fast immer vorteilhaft, die folgende Charakterisierung zu verwenden, die gleichzeitig die Bedeutung dieses Begriffs erklärt.

Lemma 2.4. *Für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in einem Banachraum sind äquivalent:*

(i) *$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert unbedingt.*

(ii) *Für jede Vorzeichenfolge $\varepsilon_n = \pm 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$.*

(iii) *Für jede Teilfolge (n_k) konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$.*

In unendlichdimensionalen Räumen ist es wichtig, zwischen unbedingter und absoluter Konvergenz (d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$) zu unterscheiden. Absolute Konvergenz impliziert stets unbedingte, aber nur in endlichdimensionalen Räumen gilt auch die Umkehrung; z.B. konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ in ℓ_2 unbedingt, aber nicht absolut. Von Orlicz stammt der Satz, daß für eine unbedingt konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in L_p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L_p}^2 < \infty \quad \text{für } 1 \le p \le 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L_p}^p < \infty \quad \text{für } 2 < p < \infty$$

gilt. Dies zeigt unmittelbar, daß das trigonometrische System keine unbedingte Basis in $L_p[0, 2\pi]$, $p < 2$, sein kann. Für $f(t) = 1/\sqrt{t}$ ist nämlich $f \in \bigcap_{p<2} L_p$, aber $f \notin L_2$. Würde die Fourierreihe $\sum c_n e^{int}$ von f unbedingt konvergieren, wäre nach dem Satz von Orlicz $\sum |c_n|^2 < \infty$ im Widerspruch zu $f \notin L_2$.

Wenn L_1 nun keine unbedingte Basis hat, besitzt dieser Raum dann wenigstens einen Unterraum mit einer unbedingten Basis? Wir werden sehen, daß das in der Tat der Fall ist. Eine Möglichkeit, hier zu argumentieren (zugegebenermaßen nicht die einfachste, aber für das Folgende sehr zweckmäßig), besteht in der Anwendung einer Ungleichung von Banach über Fourierreihen mit Lücken: Sei $\varphi_n(t) = \sin 2^n t$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann existieren Konstanten $M \ge m > 0$, so daß für jede Linearkombination $\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n$ gilt

$$m\Bigl(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\Bigr)^{1/2} \le \Bigl\|\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\Bigr\|_{L_1} \le M\Bigl(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\Bigr)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Der entscheidende Punkt ist, daß m und M unabhängig von N sind. Daher kann man zum Grenzwert $N \to \infty$ übergehen und erhält dann als Ergebnis: Eine Funktion φ gehört genau dann zur abgeschlossenen linearen Hülle von $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ in $L_1[0, 2\pi]$, wenn φ als L_1-konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ geschrieben werden kann, und eine solche Reihe konvergiert genau dann in L_1, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

Dieses Resultat kann etwas kompakter mit dem Begriff der Isomorphie von Banachräumen ausgedrückt werden.

Definition 2.5. Zwei Banachräume X und Y heißen *isomorph* (in Zeichen $X \simeq Y$), wenn es eine bijektive lineare Abbildung $T\colon X \to Y$ und Konstanten $M \ge m > 0$ mit

$$m\|x\| \le \|Tx\| \le M\|x\| \qquad \forall x \in X \tag{2.3}$$

gibt. T heißt dann *Isomorphismus.* Ist $m = M = 1$, spricht man von einem *isometrischen Isomorphismus.*

Die zweite Ungleichung in (2.3) drückt aus, daß T stetig ist, und die erste, daß T^{-1} stetig ist, was übrigens für stetige lineare Bijektionen zwischen Banachräumen automatisch aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt. Die Ungleichung (2.2) liefert daher, daß die Abbildung

$$T\colon \ell_2 \to \operatorname{ran}(T) \subset L_1, \quad (a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

ein Isomorphismus ist. Also folgt:

Korollar 2.6. *$L_1[0,2\pi]$ enthält einen zu ℓ_2 isomorphen abgeschlossenen Unterraum; insbesondere hat L_1 einen Unterraum mit einer unbedingten Basis.*

3. Das Problem der unbedingten Basen

An dieser Stelle erhebt sich die Frage, ob Korollar 2.6 in seiner Konsequenz möglicherweise für jeden Banachraum gilt, d.h.:

- *Hat jeder Banachraum einen abgeschlossenen Unterraum mit einer unbedingten Basis?*

Diese Frage liegt unvergleichbar tiefer als die entsprechende Frage über Schauderbasen, die Mazur ja schon Anfang der dreißiger Jahre positiv beantwortet hat (vgl. Theorem 2.2(a)).

Im Juni 1991 konstruierte Tim Gowers ein Gegenbeispiel; unabhängig von ihm – und mit beinahe denselben Techniken – erhielt Bernard Maurey wenige Wochen später ebenfalls einen Banachraum ohne Teilräume mit unbedingter Basis. Ihre Konstruktion wurde 1993 in [14] veröffentlicht. Um sie zumindest ansatzweise zu beschreiben, müssen wir etwas weiter ausholen.

Eine verwandte Frage, die lange Zeit offen war, ist die nach ℓ_p-Unterräumen.

- *Besitzt jeder unendlichdimensionale Banachraum einen zu einem der Räume c_0 oder ℓ_p, $1 \le p < \infty$, isomorphen Unterraum?*

Diese Frage wurde 1974 von B. Tsirelson durch ein Gegenbeispiel beantwortet. Seine Idee ist, zuerst eine Norm $\|\,.\,\|_T$ auf dem Vektorraum c_{00} aller Folgen, die nur an endlich vielen Stellen von 0 verschiedene Einträge besitzen, zu definieren; das gesuchte Gegenbeispiel ist dann die Vervollständigung von $(c_{00}, \|\,.\,\|_T)$. Wir benötigen eine Bezeichnung. Sind E und F Teilmengen von $\mathbb{N}$, so schreiben wir $E < F$, falls $\max E < \min F$, und analog $E \le F$; ferner bezeichne Ex die Folge mit den Einträgen

$$(Ex)(n) = \begin{cases} x(n) & \text{falls } n \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jetzt kann man eine Folge von Normen auf c_{00} durch

$$\|x\|_0 = \sup_n |x(n)| = \|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_{m+1} = \max\biggl(\|x\|_m, \max\Bigl\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \|E_j x\|_m \colon \{k\} \le E_1 < \cdots < E_k \Bigr\} \biggr)$$

erklären. Für jedes $x \in c_{00}$ ist die Folge $(\|x\|_m)$ dann monoton wachsend und nach oben beschränkt, also existiert

$$\|x\|_T := \lim_{m\to\infty} \|x\|_m$$

für alle $x \in c_{00}$. Diese Norm liefert das gesuchte Gegenbeispiel [18, Ex. 2.e.1].

Die Norm des Tsirelson-Raums erfüllt

$$\|x\|_T = \max\left(\|x\|_\infty, \max\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \|E_j x\|_T \colon \{k\} \le E_1 < \cdots < E_k\right\}\right); \tag{3.1}$$

umgekehrt gibt es genau eine Norm, die (3.1), was als Fixpunktgleichung für Normen aufgefaßt werden kann, erfüllt. Insofern kann man (3.1) als *implizit gegebene Definition* der Norm $\| \,.\, \|_T$ auffassen.

Die Tsirelson-Norm ist nur sehr schwer zu berechnen; einfache Beispiel sind $(n \ne m)$

$$\|e_n\|_T = 1,\ \|e_n + e_m\|_T = 1,\ \|e_1 + e_2 + e_3\|_T = 1,\ \|e_3 + e_4 + e_5\|_T = \frac{3}{2}.$$

Der Anhang des Buches [4] enthält ein Computerprogramm zur Berechnung der Tsirelson-Norm. Übrigens kann man die Zahl $1/2$ auf der rechten Seite von (3.1) durch jede andere Zahl $0 < \vartheta < 1$ ersetzen; jedesmal erhält man einen Banachraum ohne c_0- oder ℓ_p-Unterräume. (Die entstehenden Räume sind für unterschiedliche ϑ nicht isomorph.)

In seiner 1991 publizierten Arbeit [23] studierte Thomas Schlumprecht eine Variante der Tsirelson-Norm, nämlich die durch

$$\|x\|_S = \max\left(\|x\|_\infty, \max\left\{\frac{1}{\log(k+1)}\sum_{j=1}^{k} \|E_j x\|_S \colon E_1 < \cdots < E_k\right\}\right) \tag{3.2}$$

implizit definierte Norm auf dem Raum c_{00}, dessen Vervollständigung heute als *Schlumprecht-Raum* X_S bekannt ist[1]. (Das war der erste Schritt zur Lösung des *distortion problems* durch Odell und Schlumprecht, die ebenfalls ein Meilenstein der Banachraumtheorie der letzten Jahre war; siehe [20], [21], [22].) Der Raum X_S besitzt eine unbedingte Basis, nämlich die Einheitsvektorbasis. Was Gowers und Maurey jedoch unmittelbar erkannten, war, daß die Einheitsvektorbasis bzgl. einer geeigneten äquivalenten Norm auf X_S nur „schwach“ unbedingt ist. Um das zu erläutern, müssen wir das Konzept der unbedingten Basis quantifizieren. Das gelingt mit dem Kriterium aus Lemma 2.4.

Definition 3.1. Sei $C \ge 1$. Eine unbedingte Basis (e_n) eines Banachraums X heißt *C-unbedingt*, wenn für alle Vorzeichen $\varepsilon_n = \pm 1$ und alle $\sum_n a_n e_n \in X$

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e_n\right\| \le C \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|. \tag{3.3}$$

[1] Beim Vergleich von (3.2) mit (3.1) fällt ein Detail auf: die Bedingung $\{k\} \le E_1$ ist weggefallen. Sie dient in der Tsirelson-Norm dazu zu verhindern, daß x in zu viele Teilstücke aufgespalten wird; bei (3.2) übernimmt der Vorfaktor $1/\log(k+1)$ diese Funktion mit.

Es folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, daß eine unbedingte Basis für eine geeignetes C auch C-unbedingt ist. Ob eine Schauderbasis unbedingt ist, hängt natürlich nicht von der Wahl einer äquivalenten Norm ab; die Größe C in (3.3) hingegen schon. Die Beobachtung von Gowers und Maurey war nun:

- *Zu jedem $C \geq 1$ existiert eine äquivalente Norm auf X_S, so daß kein abgeschlossener Unterraum von X_S eine C-unbedingte Basis besitzt.*

Natürlich ist die Einheitsvektorbasis auch in diesen äquivalenten Normen eine unbedingte Basis, aber nur mit sehr großer Konstante. Mit einer äußerst raffinierten Methode gelang es Gowers und Maurey schließlich, einen Zusatzterm in (3.2) einzuführen, so daß der entstehende Raum X_{GM} keine Unterräume mit unbedingter Basis hat. Die Norm von X_{GM} hat also die implizite Definition

$$\|x\|_{GM} = \max(\|x\|_S, [\dots]);$$

hier ist $[\dots]$ nicht nur schwierig zu beschreiben, auch der Nachweis, daß diese Norm tut, was man sich von ihr versprochen hat, ist technisch alles andere als einfach[2]. (Andererseits ist der Beweis „fast" elementar in dem Sinn, daß er kaum Ingredienzen enthält, die über eine Funktionalanalysisvorlesung hinausgehen…) Die Einzelheiten stehen auf S. 853–869 von [14].

Theorem 3.2. *Kein unendlichdimensionaler Unterraum von X_{GM} hat eine unbedingte Basis.*

Tatsächlich besitzt X_{GM} noch pathologischere Eigenschaften. Wir nennen einen Banachraum X zerlegbar, wenn es unendlichdimensionale abgeschlossene Unterräume U und V gibt, so daß $X = U \oplus V$; andernfalls heiße er unzerlegbar. Und X heißt *erblich unzerlegbar*, falls jeder unendlichdimensionale abgeschlossene Unterraum unzerlegbar ist.

Theorem 3.3. *X_{GM} ist erblich unzerlegbar.*

Um zu zeigen, daß Theorem 3.3 stärker als Theorem 3.2 ist, betrachte einen unendlichdimensionalen abgeschlossenen Unterraum Y eines erblich unzerlegbaren Raums X. Hätte Y eine unbedingte Basis (e_n), so könnte jedes $y \in Y$ gemäß

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} e_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e_{2n}$$

zerlegt werden; die beiden Reihen rechter Hand konvergieren wegen Lemma 2.4. Bezeichnet U die abgeschlossene lineare Hülle von $\{e_1, e_3, \dots\}$ und V die von $\{e_2, e_4, \dots\}$, so heißt das, daß eine Zerlegung $Y = U \oplus V$ in unendlichdimensionale abgeschlossene Teilräume gefunden ist im Widerspruch zur erblichen Unzerlegbarkeit von X.

Durch Hinzufügen eines weiteren noch komplizierteren Zusatzterms hat Gowers in [7] einen Banachraum $X_{\neg R}$ konstruiert, der ein noch ambitionierteres Problem der Banachraumtheorie entscheidet. R. C. James hat 1950 gezeigt, daß ein Banachraum mit einer unbedingten Basis, der weder isomorphe Kopien von c_0 noch von ℓ_1 enthält, notwendig reflexiv sein muß,

[2] Eine notwendige kleine Korrektur zu Lemma 12 in [14] stammt von N. Kalton [16].

und seitdem wurde vermutet, daß jeder Banachraum einen zu c_0 oder ℓ_1 isomorphen Unterraum oder einen reflexiven Teilraum enthält. Hätte sich herausgestellt, daß Räume wie X_{GM} nicht existieren, wäre diese Vermutung also tatsächlich wahr. Andererseits bedeutet die Existenz von X_{GM} noch nicht, daß sie falsch ist. Genau das besagt aber der nächste Satz.

Theorem 3.4. *Es gibt einen unendlichdimensionalen Banachraum $X_{\neg R}$, der weder eine isomorphe Kopie von c_0 noch von ℓ_1 noch einen unendlichdimensionalen reflexiven Teilraum enthält. Mehr noch: der Dualraum jedes unendlichdimensionalen Unterraums von $X_{\neg R}$ ist nicht separabel.*

Die Konstruktion von $X_{\neg R}$ ist insofern noch erheblich schwieriger als die von X_{GM}, als Theorem 3.4 ein rein unendlichdimensionales Phänomen beschreibt, während die Diskussion von X_{GM} zum Teil auf endliche Folgen in diesem Raum zurückgeführt werden kann. Es ist übrigens noch nicht bekannt, ob $X_{\neg R}$ erblich unzerlegbar ist (alles andere wäre freilich eine Überraschung...).

Die Geometrie erblich unzerlegbarer Banachräume ist etwas bizarr, wie das nächste Lemma zeigt. Die *Einheitssphäre* eines Banachraums ist die Menge aller Vektoren der Norm 1.

Lemma 3.5. *Ein Banachraum X ist genau dann erblich unzerlegbar, wenn es zu je zwei unendlichdimensionalen abgeschlossenen Unterräumen U und V Folgen (u_n) und (v_n) in den jeweiligen Einheitssphären mit $\|u_n - v_n\| \to 0$ gibt.*

Das Lemma besagt also, daß die Einheitssphären zweier unendlichdimensionaler abgeschlossener Unterräume eines erblich unzerlegbaren Banachraums den Abstand 0 haben. (Da die Einheitssphären nicht kompakt sind, kann man natürlich nicht schließen, daß sie sich schneiden.)

Der Beweis des Lemmas basiert auf folgender Äquivalenz, die aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt.

- *Sind U und V abgeschlossene Unterräume eines Banachraums mit $U \cap V = \{0\}$, so sind äquivalent:*
  (i) *Die direkte Summe $U \oplus V$ ist abgeschlossen.*
  (ii) *Die Projektion $U \oplus V \to U$, $u + v \mapsto u$, ist stetig.*
  (iii) $|||u + v||| := \|u\| + \|v\|$ *definiert eine äquivalente Norm auf $U \oplus V$.*

Um etwa zu zeigen, daß die Bedingung des Lemmas notwendig für die erbliche Unzerlegbarkeit ist, betrachte einen abgeschlossenen Unterraum Y und eine hypothetische Zerlegung $Y = U \oplus V$ in abgeschlossene unendlichdimensionale Teilräume. Die Folge $(u_n - v_n)$ aus dem Lemma konvergiert gegen 0, aber die Projektion auf den ersten Summanden ist nach Annahme stetig. Also folgt $u_n \to 0$ im Widerspruch zu $\|u_n\| = 1$. Daher kann es eine solche Zerlegung von Y nicht geben. Ähnlich zeigt man die Hinlänglichkeit.

Andererseits gestatten erblich unzerlegbare Banachräume sehr genauen Aufschluß über die Struktur der auf ihnen definierten Operatoren. Bekanntlich heißt ein stetiger linearer Operator $S\colon X \to Z$ *kompakt*, wenn für jede beschränkte Folge (x_n) in X die Bildfolge (Tx_n) eine konvergente Teilfolge besitzt. Etwas größer ist die folgende Klasse von Operatoren.

Definition 3.6. Ein stetiger linearer Operator $S\colon X \to Z$ heißt *strikt singulär*, wenn es zu jedem abgeschlossenen unendlichdimensionalen Unterraum $Y \subset X$ einen weiteren abgeschlossenen unendlichdimensionalen Unterraum $U \subset Y$ gibt, so daß die Restriktion $S|_U$ kompakt ist.

Zum Beispiel ist die identische Abbildung von ℓ_2 nach c_0 strikt singulär, aber nicht kompakt.

Ein Isomorphismus auf einem unendlichdimensionalen Raum kann nach dem Rieszschen Lemma nicht kompakt sein. Das zeigt die Hälfte des nächsten Lemmas.

Lemma 3.7. *Ein Operator S ist genau dann strikt singulär, wenn die einzigen Unterräume, auf denen die Einschränkung $S|_W\colon W \to S(W)$ ein Isomorphismus ist, endlichdimensional sind.*

Für strikt singuläre Operatoren gilt dieselbe Eigenwerttheorie wie für kompakte Operatoren (vgl. [18, Sect. 2.c]). Im folgenden benötigen wir nur einen Teil dieser Information.

Satz 3.8. *Ist $\lambda \neq 0$ und $S\colon X \to X$ strikt singulär, so hat der Operator $\lambda\,\mathrm{Id} + S$ den Fredholm-Index 0; insbesondere ist er genau dann injektiv, wenn er surjektiv ist.*

Für erblich unzerlegbare Räume formulieren wir jetzt ein fundamentales Resultat aus [14], auf das wir im nächsten Abschnitt zurückkommen.

Theorem 3.9. *Sei X ein erblich unzerlegbarer Banachraum über $\mathbb{C}$. Jeder stetige lineare Operator $T\colon X \to X$ hat dann die Gestalt $T = \lambda\,\mathrm{Id} + S$ mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{C}$ und einem strikt singulären Operator $S\colon X \to X$.*

Man benötigt komplexe Skalare, da im Beweis Spektraltheorie verwandt wird. Für reelle erblich unzerlegbare Räume stimmt Theorem 3.9 nicht ganz; hier hat V. Ferenczi gezeigt, daß der Quotientenraum der stetigen Operatoren modulo der strikt singulären Operatoren die Dimension ≤ 4 hat [5].

Mit Theorem 3.9 hat man sich ein großes Stück der Vermutung genähert, ob es einen Banachraum gibt, auf dem jeder Operator die Gestalt $\lambda\,\mathrm{Id} + K$, K ein kompakter Operator, hat; aber zur endgültigen Klärung dieses Problems braucht man wahrscheinlich einen anderen Ansatz, vgl. [12].

4. Das Hyperebenenproblem

Eine *Hyperebene* eines Banachraums ist ein abgeschlossener 1-kodimensionaler Unterraum, also der Kern eines von 0 verschiedenen linearen Funktionals. Das Hyperebenenproblem, das von Banach auf der letzten Seite seines Buchs aufgeworfen wurde, lautet:

- *Ist ein Banachraum isomorph zu seinen Hyperebenen?*

Hier ist zunächst zu beachten, daß je zwei Hyperebenen eines Banachraums stets isomorph sind. Ist nämlich $H_j = \ker l_j$ und wählt man einen Vektor $x_0 \in H_1$ mit $l_2(x_0) = 1$, so definiert $x \mapsto (x - l_2(x)x_0, l_2(x))$ einen Isomorphismus zwischen H_1 und $(H_1 \cap H_2) \oplus \mathbb{R}$. Aus Symmetriegründen gilt daher

$$H_1 \simeq (H_1 \cap H_2) \oplus \mathbb{R} \simeq H_2.$$

In allen „klassischen" Banachräumen lautet die Antwort auf das Hyperebenenproblem *ja*. Das ist besonders einfach im Fall der Folgenräume $X = c_0$ oder ℓ_p zu sehen, denn hier vermittelt der Shiftoperator $(x(1), x(2), \dots) \mapsto (0, x(1), x(2), \dots)$ einen Isomorphismus von X auf die Hyperebene $\{x \in X\colon x(1) = 0\}$.

Was den allgemeinen Fall angeht, hat Gowers 1991 durch eine Modifikation von X_{GM} ein Gegenbeispiel erzielt [6]; interessanterweise benötigte er für sein Argument eine Variante von X_{GM}, die eine unbedingte Basis besitzt. Im Laufe desselben Jahres stellte sich jedoch heraus, daß X_{GM} selbst ein Gegenbeispiel ist. Es gilt nämlich:

Theorem 4.1. *Ein erblich unzerlegbarer Banachraum ist zu keinem echten Teilraum isomorph.*

Im Fall komplexer Skalare folgt das sofort aus Theorem 3.9. Nehmen wir nämlich an, $T\colon X \to Y$ sei ein Isomorphismus des erblich unzerlegbaren Raums X auf einen Teilraum $Y \subset X$. Nach Theorem 3.9 hat T die Gestalt $T = \lambda \,\mathrm{Id} + S$, wo S strikt singulär ist. Der Fall $\lambda = 0$ ist wegen Lemma 3.7 unmöglich; und ist $\lambda \neq 0$, so ist der injektive Operator $T\colon X \to X$ nach Satz 3.8 auch surjektiv, das heißt $Y = X$.

Übrigens hat Banach in Wirklichkeit eine viel bescheidenere Frage gestellt, nämlich ob ein Banachraum stets dieselbe „lineare Dimension" wie seine Hyperebenen hat [1, S. 246]. In moderner Sprache heißt das nichts anderes als die Frage, ob jeder Banachraum zu einem echten Teilraum isomorph ist. Theorem 4.1 beantwortet auch diese Frage! In [15] gelingt es Gowers und Maurey, noch raffiniertere Gegenbeispiele zum Hyperebenenproblem zu konstruieren:

Theorem 4.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen Banachraum $X_{(m)}$, so daß je zwei endlich-kodimensionale Unterräume der Kodimension k bzw. l genau dann isomorph sind, wenn $k \equiv l \mod m$.*

$X_{(2)}$ ist also nicht isomorph zu seinen Hyperebenen, aber zum Schnitt zweier (veschiedener) Hyperebenen.

5. Das Schröder-Bernstein-Problem

Bekanntlich besagt der Satz von Schröder-Bernstein aus der Mengenlehre:

- *Ist eine Menge M zu einer Teilmenge der Menge N gleichmächtig und ist N zu einer Teilmenge von M gleichmächtig, so besitzen M und N dieselbe Mächtigkeit.*

Eine Übertragung auf die Banachraumtheorie könnte auf das folgende Problem hinauslaufen.

- *Sind X und Y Banachräume und ist X zu einem Teilraum von Y isomorph sowie Y zu einem Teilraum von X isomorph, sind dann X und Y selbst isomorph?*

Es zeigt sich relativ schnell, daß die Antwort hier *nein* lautet. Wir haben nämlich in Korollar 2.6 gesehen, daß ℓ_2 zu einem Unterraum von $L_1 = L_1[0, 2\pi]$ isomorph ist. Damit gilt die obige Voraussetzung für $X = \ell_2 \oplus L_1$ und $Y = L_1 \oplus L_1 \simeq L_1$; aber es ist bekannt, daß X und Y nicht isomorph sind (das folgt z.B. aus der sog. Dunford-Pettis-Eigenschaft, die L_1 besitzt, aber nicht ℓ_2).

Eine seriöse Frage entsteht jedoch, wenn man nur spezielle Teilräume zuläßt. Der folgende Begriff ist implizit bereits in Abschnitt 3 aufgetaucht.

Definition 5.1. Ein abgeschlossener Unterraum U eines Banachraums X heißt *komplementiert*, falls es einen abgeschlossenen Unterraum V von X gibt, so daß $X = U \oplus V$.

Bekanntlich ist in einem Hilbertraum jeder abgeschlossene Unterraum komplementiert, man kann aber zeigen, daß z.B. c_0 in ℓ_∞ nicht komplementiert ist.

Das *Schröder-Bernstein-Problem* für Banachräume lautet nun:

- *Sind X und Y Banachräume und ist X zu einem komplementierten Teilraum von Y isomorph sowie Y zu einem komplementierten Teilraum von X isomorph, sind dann X und Y selbst isomorph?*

Hier gibt es positive Antworten z.B. im Fall $X = \ell_p$ (Pełczyński 1960), oder wenn X und Y zu ihren jeweiligen „Quadraten“ $X \oplus X$ bzw. $Y \oplus Y$ isomorph sind, denn (Pełczyński 1958)

$$\begin{aligned} X &\simeq Y \oplus V \simeq (Y \oplus Y) \oplus V \simeq Y \oplus (Y \oplus V) \simeq Y \oplus X \\ &\simeq X \oplus Y \simeq \cdots \simeq Y. \end{aligned}$$

(Auf diese Weise zeigt man übrigens, daß der Folgenraum ℓ_∞ zum Funktionenraum L_∞ isomorph ist.) Zum Stand der Dinge vor 1990 vgl. [2].

Mit Hilfe eines geeigneten unendlichen Produkts von Räumen vom X_{GM}-Typ vermochte Gowers, ein Gegenbeispiel zum Schröder-Bernstein-Problem zu konstruieren [10]; eine Verschärfung findet man in [15], nämlich:

Theorem 5.2. *Es gibt einen Banachraum X mit $X \simeq X \oplus X \oplus X$, aber $X \not\simeq X \oplus X$.*

Also ist $Y := X \oplus X$ zu einem komplementierten Unterraum von X isomorph, und X ist zu einem komplementierten Unterraum von Y isomorph, aber X und Y sind nicht isomorph. Auch der Raum $X_{(2)}$ aus Theorem 4.2 ist ein Gegenbeispiel, da $X_{(2)} \simeq X_{(2)} \oplus \mathbb{R}^2$, aber $X_{(2)} \not\simeq X_{(2)} \oplus \mathbb{R}$ ist.

6. Der Dichotomiesatz

In den vergangenen Abschnitten wurde hauptsächlich über Gegenbeispiele zu berühmten offenen Problemen der Banachraumtheorie berichtet. Die Ideen von Gowers haben aber auch zu positiven strukturellen Resultaten geführt. Hier ist insbesondere sein gefeierter Dichotomiesatz aus dem Jahr 1993 zu nennen, der leider bis heute nicht vollständig veröffentlicht ist ([13], siehe jedoch [11] und [19]).

Theorem 6.1. *Jeder unendlichdimensionale Banachraum besitzt einen unendlichdimensionalen abgeschlossenen Unterraum, der entweder eine unbedingte Basis hat oder erblich unzerlegbar ist.*

Daher enthält jeder Banachraum einen Unterraum, der entweder eine sehr einfache oder eine sehr komplizierte Struktur hat – nur kann man im voraus nicht garantieren, welche.

Eine solche Aussage findet man typischerweise in der Ramseytheorie der Kombinatorik; hier eine sehr simple Illustration: Unter 6 beliebig ausgewählten Menschen finden sich immer 3, die sich entweder paarweise kennen oder einander paarweise unbekannt sind. Dies ist eine einfache Knobelaufgabe; will man dieselbe Aussage für Teilmengen von 4 Leuten treffen, muß man mindestens 18 Menschen zusammenbringen, und für Teilmengen von 5 ist die genaue Mindestzahl bis heute nicht bekannt (sie liegt zwischen 43 und 55).

Der Kern des Beweises des Dichotomiesatzes ist auch kombinatorisch und beruht auf dem *Gowers-Spiel.* Das „Spielbrett“ ist eine Teilmenge σ der Menge der endlichen Folgen $\Sigma(X)$ eines Banachraums X. Ein für den Dichotomiesatz wichtiges Beispiel ist ($C \geq 1$ gegeben)

$$\sigma = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \colon \left\| \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j \right\| > C \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|,\ n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{6.1}$$

Das Spiel wird von zwei Spielern, **U** wie Ulrich und **V** wie Vera[3], gespielt. **U** spielt Unterräume, und **V** spielt Vektoren nach folgender Regel: Zuerst zieht **U** einen (abgeschlossenen unendlichdimensionalen) Unterraum U_1 von X, und **V** zieht einen Vektor $x_1 \in U_1$. Danach zieht **U** einen weiteren Unterraum U_2 von X, der mit U_1 nichts zu tun zu haben braucht, und **V** zieht einen Vektor $x_2 \in U_2$, usw. **V** gewinnt, wenn sie es im Laufe des Spiels zu irgendeinem Zeitpunkt n schafft, daß die von ihr gezogenen Vektorfolge $(x_1, \dots, x_n)$ in σ liegt (also z.B. (6.1) erfüllt). Tatsächlich sind die Regeln ein bißchen komplizierter, aber wer zum ersten Mal Monopoly kennenlernt, möchte auch nicht gleich mit allen Finessen der Spielregeln konfrontiert werden.

Das Ramsey-Theorem von Gowers besagt nun:

Theorem 6.2. *Falls σ groß ist in dem Sinn, daß für alle unendlichdimensionalen Unterräume $Y \subset X$ die Menge der Folgen $\sigma \cap \Sigma(Y)$ nicht leer ist, gibt es einen unendlichdimensionalen abgeschlossenen Unterraum $Z \subset X$, in dem **V** eine Gewinnstrategie für das Spiel $\sigma \cap \Sigma(Z)$ besitzt.*

Auch hier ist die Formulierung des Theorems nicht ganz korrekt, da man noch ein Störungsargument berücksichtigen muß; die obige Formulierung gibt aber den Kern wieder. Offenbar ist die Voraussetzung, daß σ groß ist, notwendig, damit **V** überhaupt gewinnen kann.

Es soll nun erläutert werden, wie Theorem 6.1 aus Theorem 6.2 folgt. Nehmen wir an, X besitze keinen Unterraum mit einer unbedingten Basis. Vergleicht man (3.3) mit (6.1), kann man vermuten, daß – für festes C – das in (6.1) definierte Spiel groß ist, was auch wirklich zutrifft; für einen vollständigen Beweis benötigt man aber etwas tieferliegende Argumente wie das Bessaga-Pełczyński-Auswahlprinzip. Sei nun Z ein Unterraum von X, in dem **V** gemäß Theorem 6.2 eine Gewinnstrategie hat. Wir versuchen mit Lemma 3.5 zu zeigen, daß Z erblich unzerlegbar ist. Seien dazu W_1 and W_2 abgeschlossene Unterräume von Z. Nehmen wir an, daß **U** die einfache

[3] Diesmal nicht Alice und Bob!

Strategie $W_1, W_2, W_1, W_2, W_1, W_2, \dots$ spielt; dagegen hat **V** eine Gewinnstrategie, sie kann also n Vektoren

$$x_1, x_3, x_5, \dots \in W_1, \quad x_2, x_4, x_6, \dots \in W_2$$

mit

$$(x_1, \dots, x_n) \in \sigma \cap \Sigma(Z)$$

finden. Setzt man

$$w_1 = x_1 + x_3 + \cdots \in W_1, \quad w_2 = -(x_2 + x_4 + \cdots) \in W_2,$$

so gilt nach (6.1)

$$\|w_1 + w_2\| > C\|w_1 - w_2\|.$$

Daraus folgt leicht mit der Dreiecksungleichung, daß die normalisierten Vektoren $w_j/\|w_j\|$ einen Abstand der Größenordnung $1/C$ besitzen. Da C aber fest ist, haben wir die Bedingung aus Lemma 3.5 noch nicht ganz verifiziert; um das zu erreichen, ist noch ein Diagonalargument nötig, dessen Details ich auslassen möchte. Damit erhält man schließlich einen Teilraum von Z, der erblich unzerlegbar ist.

7. Das Problem der homogenen Räume

Mit Hilfe des Dichotomiesatzes gelang die spektakuläre Lösung eines der notorischsten Probleme der Banachraumtheorie, des Problems der homogenen Räume, das ebenfalls 1932 in Banachs Buch erscheint [1, S. 244] und offenbar auf Mazur zurückgeht.

Ein *homogener Raum* ist ein unendlichdimensionaler Banachraum, der zu jedem unendlichdimensionalen abgeschlossenen Teilraum isomorph ist. Nach dem Satz von Fischer-Riesz ist ℓ_2 homogen, und das Problem homogener Räume fragt danach, ob dies das einzige Beispiel ist.

- *Ist jeder homogene Raum zu ℓ_2 isomorph?*

Da die Voraussetzung, die man hier macht, sehr stark ist, ist es außerordentlich erstaunlich, daß man vor 1990 fast nichts über homogene Räume wußte (vgl. [3]). So wußte man nicht, ob ein homogener Raum reflexiv ist oder auch bloß einen separablen Dualraum hat, und man wußte auch nicht, ob der Dualraum eines homogenen Raums wieder homogen ist. (All diese Eigenschaften treffen natürlich auf den Hilbertraum ℓ_2 zu.)

Der Durchbruch gelang schließlich mittels der Dichotomiesätze von Komorowski und Tomczak-Jaegermann [17] und Gowers. Der erstere besagt folgendes.

Theorem 7.1. *Jeder unendlichdimensionale Banachraum enthält einen unendlichdimensionalen abgeschlossenen Unterraum, der entweder zu ℓ_2 isomorph ist oder keine unbedingte Basis hat.*

Damit erhält man die Lösung des Problems.

Theorem 7.2. *Ein homogener Raum X ist isomorph zu ℓ_2.*

Der *Beweis* zerfällt in zwei Fälle: Entweder besitzt X eine unbedingte Basis oder nicht. Im ersten Fall erhalten wir das Resultat aus Theorem 7.1. Da X homogen ist, besitzt nämlich auch jeder Teilraum eine unbedingte Basis, und die zweite Alternative der Komorowski/Tomczak-Jaegermannschen

Dichotomie kann nicht eintreten. Also gibt es einen zu ℓ_2 isomorphen Unterraum Y von X. Aber nach Voraussetzung ist X zu Y isomorph und damit auch zu ℓ_2, wie behauptet.

Nehmen wir nun an, daß X keine unbedingte Basis hat; wie oben hat dann auch kein Unterraum eine unbedingte Basis. Daher tritt die erste Alternative im Gowersschen Dichotomiesatz 6.1 nicht ein, also besitzt X einen erblich unzerlegbaren Unterraum und muß folglich selbst erblich unzerlegbar sein. Nach Theorem 4.1 kann X dann aber nicht homogen sein, und wir haben gezeigt, daß der zweite Fall gar nicht eintreten kann. Der Beweis ist damit vollständig.

Es sei betont, daß sich der Beweis von Theorem 7.2 aus zwei unabhängigen Quellen speist; Theorem 6.1 und Theorem 7.1 hängen inhaltlich nicht voneinander ab, und es war bloßer Zufall, daß Theorem 7.1 ein Jahr vor Theorem 6.1 gefunden wurde. Daher wurde die Hälfte des Beweises von Theorem 7.2 in der direkten wissenschaftlichen Erbfolge von Banach geleistet; mit der Notation „$\to$“ = „ist Lehrer(in) von“ haben wir nämlich die Abfolge

$$\begin{aligned} \text{Stefan Banach} &\to \text{Stanisław Mazur} \\ &\to \text{Aleksander Pełczyński} \\ &\to \text{Nicole Tomczak-Jaegermann} \\ &\to \text{Ryszard Komorowski.} \end{aligned}$$

Die isometrische Variante von Theorem 7.2 ist jedoch nach wie vor offen:

- *Wenn X zu jedem unendlichdimensionalen abgeschlossenen Teilraum isometrisch isomorph ist, ist X dann zu ℓ_2 isometrisch isomorph?*

Zum Schluß noch ein kleiner Ausblick. Das Charakteristikum der Gegenbeispiele aus Abschnitt 3–5 ist, daß sie mittels einer implizit erklärten Norm definiert sind. Sie kommen gewissermaßen nur im Labor, aber nicht in freier Wildbahn vor. Insofern sind sie „unnatürlich“ im Gegensatz zu den in der angewandten Mathematik verwandten Banachräumen wie den L_p-Räumen, Orliczräumen etc., deren Norm durch eine Formel erklärt ist. Andererseits entwirft Gowers in dem sehr lesenswerten Überblicksartikel [8] (siehe auch [9]) eine Vision, wonach Monster wie X_{GM} sehr wohl „natürlich“ sind, da jeder Teilraum von X_{GM} (obwohl nicht isomorph zu X_{GM}) im wesentlichen nach demselben Muster wie X_{GM} selbst gebaut ist. Eine genauere Definition und Klassifikation von in diesem Sinn „natürlichen“ Räumen wird erst das nächste Jahrtausend bringen.

Literatur

[1] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires.* Monografje Matematyczne, 1932. (Die polnische Ausgabe erschien 1931.)

[2] P. G. Casazza. *The Schröder-Bernstein property for Banach spaces.* In: *Banach Space Theory.* Proc. Research Workshop Univ. of Iowa, Contemporary Math. **85** (1989), 61–77.

[3] P. G. Casazza. *Some questions arising from the homogeneous Banach space problem.* In: *Banach Spaces.* Proc. International Workshop Univ. de los Andes, Merida, Contemporary Math. **144** (1993), 35–52.

[4] P. G. Casazza und T. J. Shura. *Tsirelson's Space*. Lecture Notes in Math. 1363. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1989.

[5] V. Ferenczi. *Hereditarily finitely indecomposable Banach spaces*. Studia Math. **123** (1997), 135–149.

[6] W. T. Gowers. *A solution to Banach's hyperplane problem*. Bull. London Math. Soc. **26** (1994), 523–530.

[7] W. T. Gowers. *A Banach space not containing c_0, ℓ_1 or a reflexive subspace*. Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 407–420.

[8] W. T. Gowers. *Recent results in the theory of infinite-dimensional Banach spaces*. In: Proc. ICM Zürich 1994. Birkhäuser, pp. 933–942.

[9] W. T. Gowers. *Banach spaces with few operators*. In: Proc. ECM Budapest 1996. Birkhäuser, pp. 191–201.

[10] W. T. Gowers. *A solution to the Schröder-Bernstein problem for Banach spaces*. Bull. London Math. Soc. **28** (1996), 297–304.

[11] W. T. Gowers. *A new dichotomy for Banach spaces*. Geom. and Funct. Anal. **6** (1996), 1083–1093.

[12] W. T. Gowers. *A remark about the scalar-plus-compact problem*. In: K. Ball, V. Milman (Hg.), *Convex Geometric Analysis*, Cambridge University Press 1999, pp. 111–115.

[13] W. T. Gowers. *Analytic sets and games in Banach spaces*. Preprint 1994.

[14] W. T. Gowers und B. Maurey. *The unconditional basic sequence problem*. J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851–874.

[15] W. T. Gowers und B. Maurey. *Banach spaces with small spaces of operators*. Math. Ann. **307** (1997), 543–568.

[16] N. Kalton. *The basic sequence problem*. Studia Math. **116** (1995), 167–187.

[17] R. Komorowski und N. Tomczak-Jaegermann. *Banach spaces without local unconditional structure*. Israel J. Math. **89** (1995), 205–226. *Correction*. Ibid. **105** (1998), 85–92.

[18] J. Lindenstrauss und L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[19] B. Maurey. *A note on Gowers' dichotomy theorem*. In: K. Ball, V. Milman (Hg.), *Convex Geometric Analysis*, Cambridge University Press 1999, pp. 149–157.

[20] E. Odell und Th. Schlumprecht. *The distortion of Hilbert space*. Geom. and Funct. Anal. **3** (1993), 201–207.

[21] E. Odell und Th. Schlumprecht. *The distortion problem*. Acta Math. **173** (1994), 259–281.

[22] E. Odell und Th. Schlumprecht. *Distortion and stabilized structure in Banach spaces: New geometric phenomena for Banach and Hilbert spaces*. In: Proc. ICM Zürich 1994. Birkhäuser, pp. 955–965.

[23] Th. Schlumprecht. *An arbitrarily distortable Banach space*. Israel J. Math. **76** (1991), 81–95.

FB Mathematik, Freie Universität Berlin, Arnimallee 2–6, D-14 195 Berlin
e-mail: werner@math.fu-berlin.de