Numerische Berechnung der Mittag-Leffler-Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ und ihrer Ableitung

Rudolf Gorenflo, Ioulia Loutchko und Yuri Luchko

Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin, D-14195 Berlin, Deutschland

1. Einleitung

Die Funktion

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}, \ \alpha > 0, \ z \in \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

wurde zum ersten Male von Mittag-Leffler im Zusammenhang mit seinem Verfahren der Summierung divergenter Reihen eingeführt. Diese Funktion erweist sich als einfachstes Beispiel einer ganzen Funktion, die eine bestimmte Ordnung $1/\alpha$ und einen normalen Typ hat. Eine weitere Untersuchung von Eigenschaften der Mittag-Leffler-Funktion und ihrer Anwendungen zu vielfältigen Fragen der mathematischen Analyse wurde von Wiman [24]-[25] und Buhl [6] durchgeführt. Eine wichtige Verallgemeinerung der Mittag-Leffler-Funktion

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)}, \ \alpha > 0, \ \beta \in \mathbf{C}, \ z \in \mathbf{C}, \tag{1.2}$$

wurde durch die Arbeiten von Humbert [18], Agarwal [1], Humbert und Agarwal [19], Cleota und Hughes [8] eingeführt.

Seit einigen Jahren besteht verschärftes Interesse von Naturwissenschaftlern an Funktionen des Mittag-Leffler-Typs. Dieses ist bedingt durch die engen Verbindungen dieser Funktionen mit Differentialgleichungen gebrochener Ordnung und mit Integralgleichungen des Abel-Typs. Solche Gleichungen werden heutzutage zunehmend zur Modellierung von realen Prozessen in der Naturwissenschaft verwendet (Babenko [2], Bagley and Torvik [3], Blair [4]-[5], Caputo and Mainardi [7], El-Sayed [11], Gorenflo and Mainardi [13]-[15], Gorenflo and Rutman [16], Gorenflo and Vessella [17], Mainardi [20], Schneider and Wyss [21], Slonimski [22], Westerlund and Elkstam [23]).

Obwohl schon viele Arbeiten über analytische Methoden zur Lösung der Differentialgleichungen gebrochener Ordnung erschienen sind, muß man dennoch bemerken, daß analytische Lösungen in geschlossener Form nur für die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und für eine relativ knappe Klasse von Gleichungen mit speziellen variablen Koeffizienten gefunden wurden. Im allgemeinen Falle ist es nötig, numerische Methoden anzuwenden.

In Verbindung mit der grundlegenden Rolle der Funktionen des Mittag-Leffler-Typs für Lösung der Differentialgleichungen gebrochener Ordnung und Integralgleichungen des Abel-Typs scheint es wichtig zu sein, als ersten Schritt ihre Theorie und stabile Verfahren zu ihrer numerischen Berechnung zu entwickeln. Die einfachste Funktion vom Mittag-Leffler-Typ, $E_\alpha(z)$, hängt von zwei Variablen ab: dem komplexen Argument z und dem reellen Parameter α. Die Verallgemeinerungen der Mittag-Leffler-Funktion haben noch mehr Variablen und α kann auch komplex sein. Praktische Erfahrungen im Gebiet der numerische Berechnung der speziellen Funktionen der mathematischen Physik lehren uns, daß in diesem Fall unterschiedliche numerische Methoden in verschiedenen Bereichen der komplexen Ebene verwendet werden sollen. Das Ziel der Arbeit ist die Entwicklung einiger Methoden zur numerischen Berechnung der Mittag-Leffler Funktion (1.2) und ihrer Ableitung, die Einschätzung ihrer Grenzen und Möglichkeiten und ihrer Genauigkeit. Im Falle $0 < \alpha \leq 1$ werden für kleine $|z|$ Taylor-Reihen, für andere Werte des Argumentes z wird Integraldarstellung in Form eines uneigentlichen Integrals über die Hankelschlinge verwendet. Der Fall $1 < \alpha$ kommt mit Hilfe einer Rekursionsformel auf den Fall $0 < \alpha \leq 1$ hinaus. Auch die entsprechenden Computerprogramme in "Mathematica"-Computersprache wurden entwickelt.

2. Integraldarstellungen der Mittag-Leffler-Funktion

Eines der wichtigsten Instrumente der Untersuchung ganzer Funktionen sind Integraldarstellungen. Für die Mittag-Leffler-Funktion (1.1) und ihre Verallgemeinerung (1.2) wurden die Integraldarstellungen in Form eines uneigentlichen Integrals über die Hankelschlinge von Mittag-Leffler im Falle $\beta = 1$ untersucht; der allgemeine Fall für ein beliebiges β wurde von Erdélyi et al. [12] und Dzherbashyan [9],[10] betrachtet:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{\gamma(\epsilon;\delta)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha}}{\zeta - z} \, d\zeta, \ \ z \in G^{(-)}(\epsilon;\delta), \tag{2.1}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} + \frac{1}{2\pi i \alpha} \int_{\gamma(\epsilon;\delta)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha}}{\zeta - z} d\zeta, \; z \in G^{(+)}(\epsilon;\delta), \quad (2.2)$$

unter Bedingungen

$$0 < \alpha < 2, \; \frac{\pi\alpha}{2} < \delta \leq \min\{\pi, \pi\alpha\}. \quad (2.3)$$

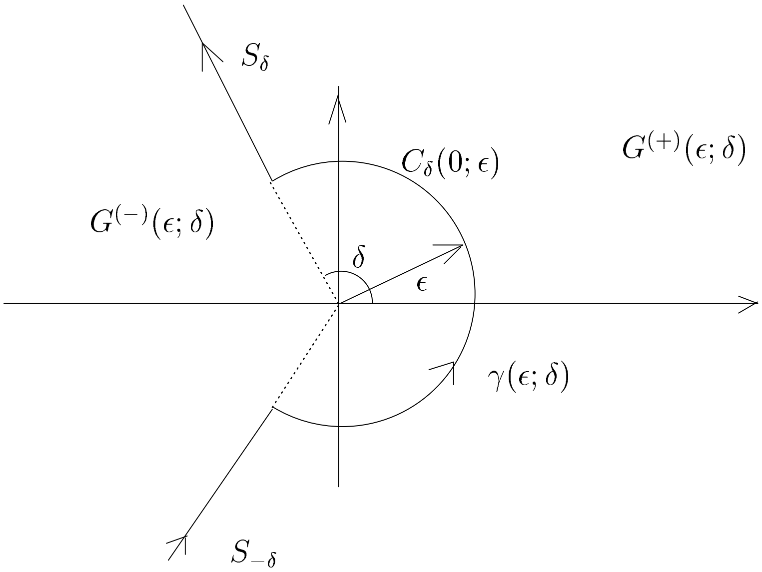

Figure 2.1: Die Kontur $\gamma(\epsilon;\delta)$

Die Kontur $\gamma(\epsilon;\delta)$ kann man auf dem Bild 1 sehen, die besteht aus zwei Strahlen $S_{-\delta}$ und S_δ ($\arg\zeta = -\delta, \; |\zeta| \geq \epsilon$ und $\arg\zeta = \delta, \; |\zeta| \geq \epsilon$) und einen Kreisbogen $C_\delta(0;\epsilon)$ ($|\zeta| = \epsilon, \; -\delta \leq \arg\zeta \leq \delta$). Links von der Kontur befindet sich Gebiet $G^{(-)}(\epsilon,\delta)$, rechts - Gebiet $G^{(+)}(\epsilon;\delta)$.

Wir betrachten weiter nur für die Anwendungen wichtigen Fall $\beta \in \mathbf{R}$. Für den Fall suchen wir eine für numerische Berechnung der Mittag-Leffler Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ besser passende Form der Integraldarstellungen (2.1) und (2.2) aus. Sei

$$\phi(\zeta, z) = \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha}}{\zeta - z}.$$

Wir haben dann die Darstellung

$$I = \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{\gamma(\epsilon;\delta)} \phi(\zeta, z)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{S_{-\delta}} \phi(\zeta, z)\, d\zeta \quad (2.4)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{C_\delta(0;\epsilon)} \phi(\zeta, z)\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{S_\delta} \phi(\zeta, z)\, d\zeta = I_1 + I_2 + I_3.$$

Wir transformieren jetzt die Integrale I_1, I_2 und I_3. Für I_1 nehmen wir $\zeta = re^{-i\delta}$, $\epsilon \le r < \infty$ und bekommen

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_{S_{-\delta}} \phi(\zeta,z)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_{+\infty}^{\epsilon} \frac{e^{(re^{-i\delta})^{1/\alpha}}(re^{-i\delta})^{(1-\beta)/\alpha}}{re^{-i\delta}-z}\,e^{-i\delta}\,dr. \quad (2.5)$$

Ähnlich für I_3 (mit $\zeta = re^{i\delta}$, $\epsilon \le r < \infty$):

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_{S_{\delta}} \phi(\zeta,z)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{(re^{i\delta})^{1/\alpha}}(re^{i\delta})^{(1-\beta)/\alpha}}{re^{i\delta}-z}\,e^{i\delta}\,dr. \quad (2.6)$$

Für I_2 wird $\zeta = \epsilon e^{i\varphi}$, $-\delta \le \varphi \le \delta$ und

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_{C_\delta(0;\epsilon)} \phi(\zeta,z)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{(\epsilon e^{i\varphi})^{1/\alpha}}(\epsilon e^{i\varphi})^{(1-\beta)/\alpha}}{\epsilon e^{i\varphi}-z}\,\epsilon i e^{i\varphi}\,d\varphi \quad (2.7)$$

$$= \frac{\epsilon^{1+(1-\beta)/\alpha}}{2\pi\alpha}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{\epsilon^{1/\alpha}e^{i\varphi/\alpha}}e^{i\varphi((1-\beta)/\alpha+1)}}{\epsilon e^{i\varphi}-z}\,d\varphi = \int_{-\delta}^{\delta} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi,$$

mit

$$P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z] = \frac{\epsilon^{1+(1-\beta)/\alpha}}{2\pi\alpha}\frac{e^{\epsilon^{1/\alpha}\cos(\varphi/\alpha)}(\cos(\omega)+i\sin(\omega))}{\epsilon e^{i\varphi}-z}, \quad (2.8)$$

$$\omega = \epsilon^{1/\alpha}\sin(\varphi/\alpha)+\varphi(1+(1-\beta)/\alpha).$$

Wir schreiben die Summe $I_1 + I_3$ um:

$$I_1 + I_3 = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_{\epsilon}^{+\infty}\Big\{\frac{e^{(re^{i\delta})^{1/\alpha}}(re^{i\delta})^{(1-\beta)/\alpha}}{re^{i\delta}-z}\,e^{i\delta}$$

$$-\frac{e^{(re^{-i\delta})^{1/\alpha}}(re^{-i\delta})^{(1-\beta)/\alpha}}{re^{-i\delta}-z}\,e^{-i\delta}\Big\}\,dr$$

$$= \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_{\epsilon}^{+\infty} r^{(1-\beta)/\alpha}e^{r^{1/\alpha}\cos(\delta/\alpha)}\Big\{\frac{e^{i(r^{1/\alpha}\sin(\delta/\alpha)+\delta(1+(1-\beta)/\alpha))}}{re^{i\delta}-z}$$

$$-\frac{e^{-i(r^{1/\alpha}\sin(\delta/\alpha)+\delta(1+(1-\beta)/\alpha))}}{re^{-i\delta}-z}\Big\}\,dr = \int_{\epsilon}^{+\infty} K[\alpha,\beta,\delta,r,z]\,dr,$$

mit

$$K[\alpha,\beta,\delta,r,z] = \frac{1}{\pi\alpha}r^{(1-\beta)/\alpha}e^{r^{1/\alpha}\cos(\delta/\alpha)}\frac{r\sin(\psi-\delta)-z\sin(\psi)}{r^2-2rz\cos(\delta)+z^2}, \quad (2.9)$$

$$\psi = r^{1/\alpha}\sin(\delta/\alpha)+\delta(1+(1-\beta)/\alpha).$$

Mit Hilfe (2.4)-(2.9) können wir die Formeln (2.1) und (2.2) umschreiben:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\epsilon}^{+\infty} K[\alpha,\beta,\delta,r,z]\,dr + \int_{-\delta}^{\delta} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi,\ \ z \in G^{(-)}(\epsilon;\delta), \tag{2.10}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\epsilon}^{+\infty} K[\alpha,\beta,\delta,r,z]\,dr + \int_{-\delta}^{\delta} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi \tag{2.11}$$

$$+\frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}},\ \ z \in G^{(+)}(\epsilon;\delta).$$

Wir betrachten jetzt den Fall $0 < \alpha \leq 1,\ \ z \neq 0$. Aus Bedingung (2.3) folgt es nun, daß $\delta = \min\{\pi, \pi\alpha\} = \pi\alpha$ ausgewählt werden kann. Die Kernfunktion (2.9) sieht in diesem Fall einfacher aus:

$$K[\alpha,\beta,\pi\alpha,r,z] = \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z] \tag{2.12}$$

$$= \frac{1}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha} e^{-r^{1/\alpha}} \frac{r\sin(\pi(1-\beta)) - z\sin(\pi(1-\beta+\alpha))}{r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2}.$$

Um die Formeln (2.10)-(2.12) für numerische Berechnung der Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ an der beliebigen Stelle $z \in \mathbf{C},\ \ z \neq 0$ benutzen zu können, werden wir drei Möglichkeiten für $\arg z$ unterscheiden: A) $|\arg z| > \pi\alpha$, B) $|\arg z| = \pi\alpha$ und C) $|\arg z| < \pi\alpha$.

A) $|\arg z| > \pi\alpha$.

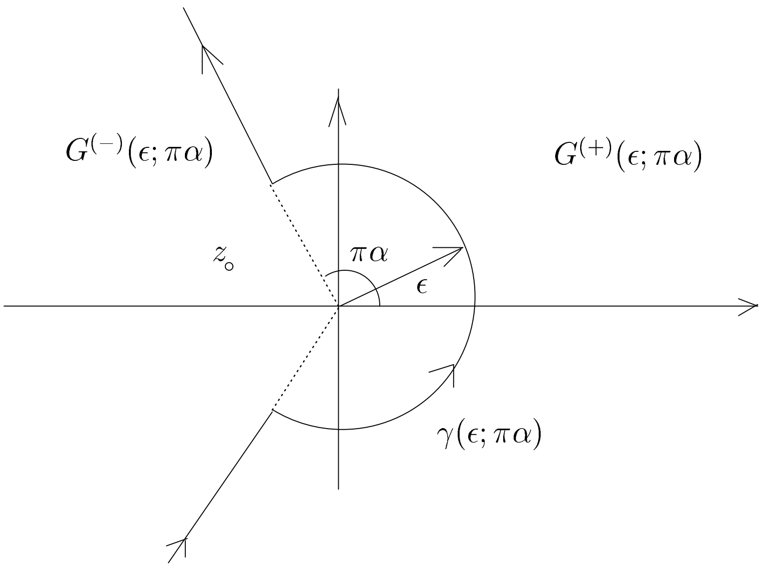

Figure 2.2: Der Fall A) $|\arg z| > \pi\alpha$

In diesem Fall liegt z immer (für beliebige ϵ) im Gebiet $G^{(-)}(\epsilon;\delta)$ (siehe Bild 2) und wir haben den

SATZ 2.1: *Unter den Bedingungen*

$$0 < \alpha \leq 1,\ \ \beta \in \mathbf{R},\ \ |\arg z| > \pi\alpha,\ \ z \neq 0$$

hat die Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ die Darstellungen

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\epsilon}^{\infty} \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr + \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi,\ \ \epsilon > 0,\quad \beta \in \mathbf{R}, \tag{2.13}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{0}^{\infty} \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr,\quad \textit{falls}\ \ \beta < 1+\alpha, \tag{2.14}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-r^{1/\alpha}}}{r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2}\,dr - \frac{1}{z},\quad \textit{falls}\ \ \beta = 1+\alpha \tag{2.15}$$

mit

$$\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z] = \frac{1}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha} e^{-r^{1/\alpha}} \frac{r\sin(\pi(1-\beta)) - z\sin(\pi(1-\beta+\alpha))}{r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2},$$

$$P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z] = \frac{\epsilon^{1+(1-\beta)/\alpha}}{2\pi\alpha} \frac{e^{\epsilon^{1/\alpha}\cos(\varphi/\alpha)}(\cos(\omega) + i\sin(\omega))}{\epsilon e^{i\varphi} - z},$$
$$\omega = \epsilon^{1/\alpha}\sin(\varphi/\alpha) + \varphi(1 + (1-\beta)/\alpha).$$

Beweis: Die Darstellung (2.13) bekommen wir direkt aus (2.10) mit $\delta = \pi\alpha$ und (2.12) und die gilt für beliebige $\beta \in \mathbf{R}$. Wir betrachten jetzt (2.13) für $\beta < 1+\alpha$. In diesem Fall

$$|P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]| \leq C\epsilon^{1+(1-\beta)/\alpha},\ \ -\pi\alpha \leq \varphi \leq \pi\alpha,\ \ 0 < \epsilon < 1$$

mit einer Konstante C, die nicht von φ abhängt. Es folgt von hier, daß

$$\int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi\ \to 0\ \ \text{falls}\ \ \epsilon \to 0. \tag{2.16}$$

Wir haben auch

$$\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z] = O(r^{(1-\beta)/\alpha}),\ \ r \to 0$$

und es bedeutet, daß

$$\int_{0}^{\infty} \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr$$

ein konvergentes im Punkt $r = 0$ uneigentliches Integral ist falls $\beta < 1 + \alpha$ und es hat keine Singularität im Punkt $r = 0$ falls $\beta \leq 1$. In der Darstellung (2.13) können wir mit Hilfe (2.16) einen Grenzwert berechnen wenn $\epsilon \to 0$ und so kommen wir zur Darstellung (2.14).

Wenn endlich $\beta = 1 + \alpha$ ist, haben wir die Formeln

$$P[\alpha, \beta, \epsilon, \varphi, z] = \frac{1}{2\pi\alpha} \frac{e^{\epsilon^{1/\alpha}\cos(\varphi/\alpha)}(\cos(\epsilon^{1/\alpha}\sin(\varphi/\alpha)) + i\sin(\epsilon^{1/\alpha}\sin(\varphi/\alpha)))}{\epsilon e^{i\varphi} - z},$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi &= \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha}\lim_{\epsilon\to 0} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi \\ &= \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} -\frac{1}{2\pi\alpha z}\,d\varphi = -\frac{1}{z}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

weil das entsprechende Integral eine gleichmäßige in ϵ Konvergenz hat. Es gilt im Falle $\beta = 1 + \alpha$ die Formel

$$\tilde{K}[\alpha, \beta, r, z] = -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\frac{e^{-r^{1/\alpha}}}{r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2} \tag{2.18}$$

und das Integral

$$\int_0^\infty \tilde{K}[\alpha, \beta, r, z]\,dr$$

hat dann keine Singularität im Punkt $r = 0$. Die Darstellung (2.15) folgt nun aus (2.13), (2.17) und (2.18). ■

Beispiel: Sei $\beta = 1$, $0 < \alpha < 1$, $z = -t^\alpha < 0$.
Aus dem Satz 2.1 folgt dann die Darstellung

$$E_{\alpha,1}(-t^\alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi\alpha} e^{-r^{1/\alpha}} \frac{t^\alpha \sin(\pi\alpha)}{r^2 + 2rt^\alpha\cos(\pi\alpha) + t^{2\alpha}}\,dr,$$

die mit Hilfe der Einsetzung $r = x^\alpha t^\alpha$ sich in der Form

$$E_{\alpha,1}(-t^\alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi} e^{-xt} \frac{x^{\alpha-1}\sin(\pi\alpha)}{x^{2\alpha} + 2x^\alpha\cos(\pi\alpha) + 1}\,dx \tag{2.19}$$

umschreiben läßt. Die Darstellung (2.19) wurde in der Arbeit Gorenflo and Mainardi [13] mit Hilfe der Laplacesche Integraltransformation gefunden.

B) $|\arg z| = \pi\alpha$.

In diesem Fall dürfen wir ϵ in unserer Kontur $\gamma(\epsilon;\delta)$ nicht beliebig klein machen, weil z direkt an der Kontur liegt, wenn $\epsilon < |z|$ ist (siehe Bild 3).

SATZ 2.2: *Unter den Bedingungen*

$$0 < \alpha \leq 1,\ \beta \in \mathbf{R},\ |\arg z| = \pi\alpha,\ z \neq 0$$

hat die Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ die Darstellung

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\epsilon}^{\infty} \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr + \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi,\ \ \epsilon > |z|, \qquad (2.20)$$

mit

$$\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z] = \frac{1}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha} e^{-r^{1/\alpha}} \frac{r\sin(\pi(1-\beta)) - z\sin(\pi(1-\beta+\alpha))}{r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2},$$

$$P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z] = \frac{\epsilon^{1+(1-\beta)/\alpha}}{2\pi\alpha} \frac{e^{\epsilon^{1/\alpha}\cos(\varphi/\alpha)}(\cos(\omega) + i\sin(\omega))}{\epsilon e^{i\varphi} - z},$$

$$\omega = \epsilon^{1/\alpha}\sin(\varphi/\alpha) + \varphi(1 + (1-\beta)/\alpha).$$

Beweis: Falls $\epsilon > |z|$ ist, liegt z im Gebiet $G^{(-)}(\epsilon;\delta)$ und die Darstellung (2.20) bekommen wir aus (2.10) mit $\delta = \pi\alpha$ und (2.12). ■

C) $|\arg z| < \pi\alpha$.

In dem Fall liegt z für $0 < \epsilon < |z|$ im Gebiet $G^{(+)}(\epsilon;\delta)$ und wir haben den

SATZ 2.3: *Unter den Bedingungen*

$$0 < \alpha \leq 1,\ \ \beta \in \mathbf{R},\ \ |\arg z| < \pi\alpha,\ \ z \neq 0$$

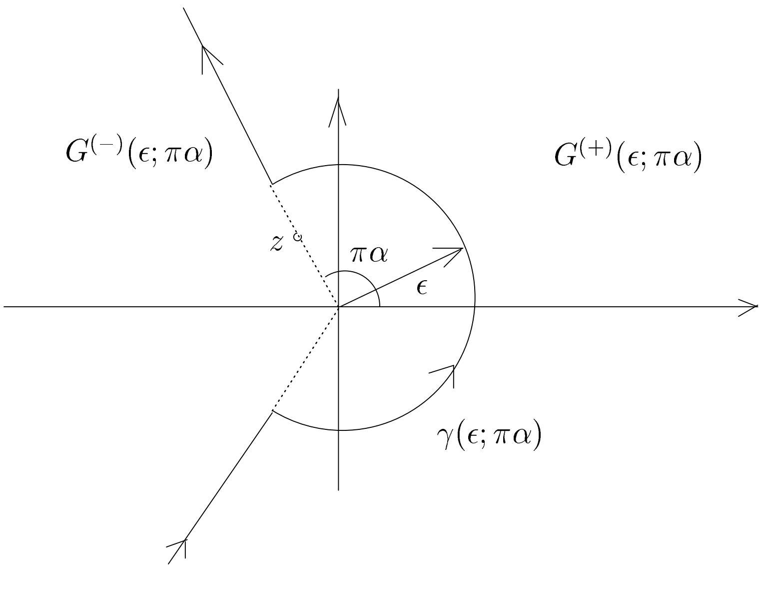

Figure 2.3: Der Fall B) $|\arg z| = \pi\alpha$

hat die Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ die Darstellungen

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\epsilon}^{\infty} \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr + \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi \tag{2.21}$$

$$+\frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}},\ \ 0 < \epsilon < |z|,\ \ \beta \in \mathbf{R},$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{0}^{\infty} \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr + \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}}, \quad \textit{falls} \quad \beta < 1+\alpha, \tag{2.22}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-r^{1/\alpha}}}{r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2}\,dr \tag{2.23}$$

$$-\frac{1}{z} + \frac{1}{\alpha z} e^{z^{1/\alpha}}, \quad \textit{falls} \quad \beta = 1+\alpha$$

mit

$$\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z] = \frac{1}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha} e^{-r^{1/\alpha}} \frac{r\sin(\pi(1-\beta)) - z\sin(\pi(1-\beta+\alpha))}{r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2},$$

$$P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z] = \frac{\epsilon^{1+(1-\beta)/\alpha}}{2\pi\alpha} \frac{e^{\epsilon^{1/\alpha}\cos(\varphi/\alpha)}(\cos(\omega) + i\sin(\omega))}{\epsilon e^{i\varphi} - z},$$

$$\omega = \epsilon^{1/\alpha}\sin(\varphi/\alpha) + \varphi(1 + (1-\beta)/\alpha).$$

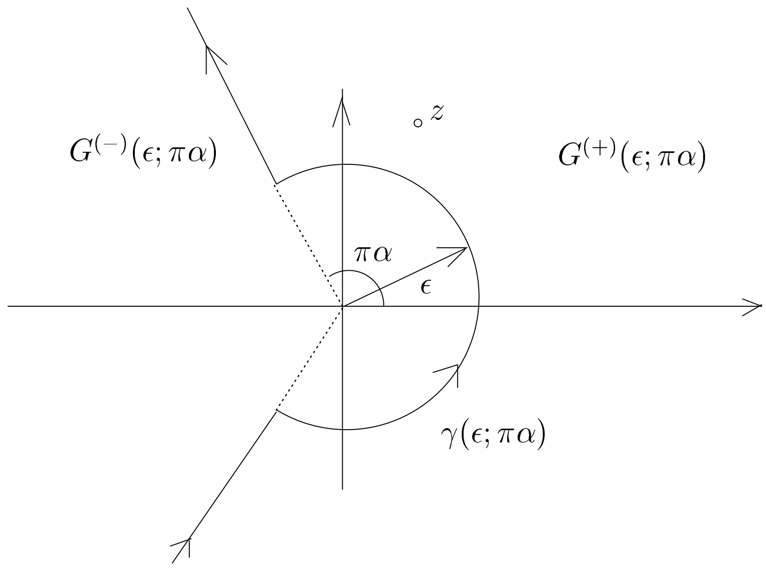

Figure 2.4: Der Fall C) $|\arg\, z| < \pi\alpha$

Beweis des Satzes ist ähnlich zum Beweis des Satzes 2.1 mit Ausnützung der Darstellung (2.11) anstatt (2.10).

3. Numerische Berechnung der Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$

Wir haben bewiesen, daß die Mittag-Leffler Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ für beliebiges Argument $z \neq 0$ und $0 < \alpha \leq 1$ mit Hilfe einer von den Formeln (2.14)-(2.13), (2.20)-(2.21) dargestellt werden kann. Wir beabsichtigen, die Formeln für numerische Berechnung der Mittag-Leffler Funktion zu verwenden, falls $q < |z|,\ 0 < q < 1$ und $0 < \alpha \leq 1$ ist. Im Falle $|z| \leq q,\ 0 < q < 1$ berechnen wir $E_{\alpha,\beta}(z)$ für beliebige $\alpha > 0$ mit Hilfe der Potenzreihe (1.2). Der Fall $1 < \alpha$ kommt mit Hilfe einer Rekursionsformel auf den Fall $0 < \alpha \leq 1$ hinaus. Um die Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ an der beliebigen Stelle $z \in \mathbf{C}$ für beliebige Werte $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R}$ berechnen zu können, werden wir drei Möglichkeiten unterscheiden: A) $|z| \leq q,\ 0 < q < 1$ (q ist eine fixierte Zahl), $0 < \alpha$, B) $|z| > q,\ 0 < \alpha \leq 1$ und C) $|z| > q,\ 1 < \alpha$. Jeweils berechnen wir die Mittag-Leffler Funktion mit der gegebenen Genauigkeit $\rho > 0$.

A) $|z| \leq q,\ 0 < q < 1$.

SATZ 3.1: *Im Falle $|z| \leq q,\ 0 < q < 1,\ 0 < \alpha$ läßt sich die Mittag-Leffler Funktion mit Hilfe der Formel*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)} + \mu(z),\ \ |\mu(z)| \leq \rho, \tag{3.1}$$

$$k_0 = \max\{[(1-\beta)/\alpha] + 1,\ [\ln(\rho(1-|z|))/\ln(|z|)] + 1\}$$

mit der gegebenen Genauigkeit $\rho > 0$ berechnen.

Beweis: Die Definition (1.2) der Mittag-Leffler Funktion umschreiben wir in der Form

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)} + \mu(z,m),\ \ \mu(z,m) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)}.$$

Für alle $k \geq k_0 \geq [(1-\beta)/\alpha] + 1$ haben wir die Ungleichung

$$\Gamma(\beta+\alpha k) \geq 1$$

und damit auch die Abschätzung ($m \geq k_0$)

$$|\mu(z,m)| = \left|\sum_{k=m}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)}\right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |z|^k = |z|^m \frac{1}{1-|z|}.$$

Die Abschätzung $|\mu(z)| := |\mu(z,k_0)| < \rho$ folgt aus die Ungleichung $k_0 \geq [\ln(\rho(1-|z|))/\ln(|z|)] + 1$. ■

Bemerkung 3.1: Für numerische Berechnung der Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ im Falle A) lohnt es sich, in dem Satz 3.1 eine Zahl q zu wählen, die nicht besonders nah zur 1 liegt (damit die Zahl der Summanden in der Summe der Formel (3.1) nicht groß ist). Wir haben zum Beispiel, in unseren Computerprogrammen $q = 0.9$ genommen.

B) $q < |z|,\ 0 < \alpha \leq 1$.

In diesem Fall verwenden wir für numerische Berechnung der Mittag-Leffler-Funktion die Integraldarstellungen (2.14)-(2.13), (2.20)-(2.21). Wir mußen dann entweder nur das uneigentliches Integral mit unendlicher Integrationsgrenze

$$I = \int_a^\infty \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr,\ a \in \{0,\epsilon\},$$

$$\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z] = \frac{1}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha} e^{-r^{1/\alpha}} \frac{r\sin(\pi(1-\beta)) - z\sin(\pi(1-\beta+\alpha))}{r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2}$$

oder auch das Integral

$$J = \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]\,d\varphi,\ \epsilon > 0,$$

$$P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z] = \frac{\epsilon^{1+(1-\beta)/\alpha}}{2\pi\alpha} \frac{e^{\epsilon^{1/\alpha}\cos(\varphi/\alpha)}(\cos(\omega) + i\sin(\omega))}{\epsilon e^{i\varphi} - z},$$
$$\omega = \epsilon^{1/\alpha}\sin(\varphi/\alpha) + \varphi(1 + (1-\beta)/\alpha)$$

numerisch berechnen. Das zweite Integral J über die beschränkte Funktion $P[\alpha,\beta,\epsilon,\varphi,z]$ mit endlicher Integrationsgrenze $[-\pi\alpha,\pi\alpha]$ läßt sich mit einer von vielen Produktquadraturverfahren mit einer gegebener Genauigkeit $\rho > 0$ berechnen. Um das erste uneigentliches Integral I über die beschränkte Funktion $\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]$ mit unendlicher Integrationsgrenze berechnen zu können, verwenden wir den

SATZ 3.2: *Die Darstellung*

$$I = \int_a^\infty \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr = \int_a^{r_0} \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr + \mu(z),\ |\mu(z)| \leq \rho,\ a \in \{0,\epsilon\} \tag{3.2}$$

gilt unter Bedingungen

$$0 < \alpha \leq 1,\ 0 < q < |z|,$$

$$r_0 = \begin{cases} \max\{1, 2|z|, (-\ln(\pi\rho/6))^\alpha\}, & \textit{falls } \beta \geq 0, \\ \max\{(|\beta|+1)^\alpha, 2|z|, (-2\ln(\pi\rho/(6(|\beta|+2)(2|\beta|)^{|\beta|}))^\alpha\}, & \textit{falls } \beta < 0. \end{cases}$$

Beweis: Da

$$I = \int_a^R \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr + \mu(z,R),\ \ a \in \{0,\epsilon\}$$

mit

$$\mu(z,R) = \int_R^\infty \tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]\,dr$$

ist, versuchen wir den Betrag von $\mu(z,R)$ abzuschätzen. Wir betrachten zuerst eine Abschätzung der Funktion $\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]$. Sei $z_0 = e^{i\pi\alpha}$ und $r \geq 2|z|$. Wir haben dann

$$\frac{1}{|r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2|} = \frac{1}{r^2\left|\frac{z}{r} - z_0\right|\left|\frac{z}{r} - \overline{z}_0\right|}$$

$$\leq \frac{1}{r^2\left(\left|\frac{z}{r}\right| - |z_0|\right)\left(\left|\frac{z}{r}\right| - |\overline{z_0}|\right)} = \frac{1}{r^2\left(1 - \left|\frac{z}{r}\right|\right)^2} \leq \frac{4}{r^2}$$

und damit auch

$$|\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]| \leq \frac{1}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha} e^{-r^{1/\alpha}} \frac{|r| + |z|}{|r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2|}$$

$$\leq \frac{1}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha} e^{-r^{1/\alpha}} \frac{6r}{r^2} = \frac{6}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha - 1} e^{-r^{1/\alpha}}.$$

Wir schätzen den Betrag $\mu(z,R)$ (mit $R \geq 2|z|$) ab:

$$|\mu(z,R)| \leq \int_R^\infty |\tilde{K}[\alpha,\beta,r,z]|\,dr \tag{3.3}$$

$$\leq \int_R^\infty \frac{6}{\pi\alpha} r^{(1-\beta)/\alpha - 1} e^{-r^{1/\alpha}}\,dr = \frac{6}{\pi}\int_{R^{1/\alpha}}^\infty t^{-\beta} e^{-t} dt = \frac{6}{\pi}\Gamma(1-\beta, R^{1/\alpha}),$$

wo

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,dt,\ \ x > 0$$

unvolständige Gamma-Funktion ist (siehe Erdélyi et al. [12]). Weitere Abschätzungen bekommen wir mit Hilfe des

Lemma 3.1: *Für die unvolständige Gamma-Funktion $\Gamma(1-\beta, x)$ gelten die Ungleichungen:*

$$|\Gamma(1-\beta, x)| \leq e^{-x},\ \ x \geq 1,\ \ \beta \geq 0, \tag{3.4}$$

$$|\Gamma(1-\beta), x) \leq (|\beta| + 2) x^{-\beta} e^{-x},\ \ x \geq |\beta| + 1,\ \ \beta < 0. \tag{3.5}$$

Beweis: Von $t \geq x \geq 1$ und $\beta \geq 0$ folgt die Ungleichung $t^{-\beta}e^{-t} \leq e^{-t}$ und damit auch (3.4):

$$|\Gamma(1-\beta,x)| \leq \int_x^\infty e^{-t}\,dt = e^{-x}.$$

Wenn $\beta < 0$, bestimmen wir $n \in \mathbf{N}$ so, daß $-(n+1) \leq \beta < -n$ und verwenden wir zum Integral $\Gamma(1-\beta,x)$ n-mal Teilintegration:

$$\Gamma(1-\beta,x) = x^{-\beta}e^{-x} - \beta x^{-\beta-1}e^{-x} + \beta(\beta+1)x^{-\beta-2}e^{-x} \tag{3.6}$$

$$+\ldots+(-1)^n\prod_{i=0}^{n-1}(\beta+i)x^{-\beta-n}e^{-x} + (-1)^{n+1}\int_x^\infty \prod_{i=0}^{n}(\beta+i)t^{-\beta-n-1}e^{-t}\,dt.$$

Da in dem letzten Integral $\beta+n+1 \geq 0$ und $x \geq |\beta|+1 \geq 1$ sind, können wir die Ungleichung (3.4) benutzen:

$$\int_x^\infty t^{-\beta-n-1}e^{-t}\,dt \leq e^{-x}.$$

Für $x \geq |\beta|+1$ und $-(n+1) \leq \beta < -n$ haben wir auch:

$$x^{-\beta} > |\beta x^{-\beta-1}| > |\beta(\beta+1)x^{-\beta-2}| > \ldots > |\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)|.$$

Die letzten Ungleichungen zusammen mit die Darstellung (3.6) ergeben die Abschätzung

$$|\Gamma(1-\beta,x)| \leq (n+2)x^{-\beta}e^{-x} \leq (|\beta|+2)x^{-\beta}e^{-x},\ |x| \geq |\beta|+1$$

und damit ist das Lemma 3.1 bewiesen. Jetzt kehren wir zum Beweis des Satzes 3.2 zurück. Es folgt aus (3.3) und Lemma 3.1 die Abschätzung

$$|\mu(z,R)| \leq \begin{cases} \frac{6}{\pi}e^{-R^{1/\alpha}}, & \beta \geq 0,\ R \geq 1 \\ \frac{6}{\pi}(|\beta|+2)R^{-\beta/\alpha}e^{-R^{1/\alpha}}, & \beta < 0,\ R^{1/\alpha} \geq |\beta|+1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Falls $\beta \geq 0$ ist, gilt die Abschätzung $|\mu(z)| := |\mu(z,r_0)| < \rho$, wenn $r_0 = \max\{1, 2|z|, (-\ln(\pi\rho/6))^\alpha\}$ und für $\beta < 0$ sollen wir so eine r_0 finden, daß die Ungleichung

$$\frac{6}{\pi}(|\beta|+2)r_0^{-\beta/\alpha}e^{-r_0^{1/\alpha}} \leq \rho \tag{3.8}$$

erfüllt ist. Die Aufgabe lösen wir mit der Hilfe des

Lemma 3.2: *Für beliebige $x, y, q > 0$ gilt die Ungleichung*

$$x^y \leq (qy)^y e^{x/q}. \tag{3.9}$$

Beweis: Sei $x = ay,\ a > 0$. Dann läßt sich die Ungleichung (3.9) in der Form

$$(ay)^y \le (qy)^y e^{ay/q}$$

umschreiben, die äquivalent zur

$$a^y \le q^y e^{ay/q}$$

und damit auch zur

$$\left(\frac{a}{q}\right)^y \le \left(e^{a/q}\right)^y$$

ist. Die letzte Ungleichung ist aber richtig, weil

$$e^{a/q} \ge \max\{a/q, 1\},\ a, q > 0$$

ist und damit ist auch das Lemma 3.2 bewiesen.

Wir bezeichnen $r_0^{1/\alpha}$ als x, $-\beta$ als y, nehmen $q = 2$ und umschreiben die Ungleichung (3.8) mit Hilfe (3.9) in der Form

$$\frac{6}{\pi}(|\beta| + 2) r_0^{-\beta/\alpha} e^{-r_0^{1/\alpha}} = \frac{6}{\pi}(|\beta| + 2) x^y e^{-x}$$

$$\le \frac{6}{\pi}(|\beta| + 2)(2y)^y e^{x/2} e^{-x} = \frac{6}{\pi}(|\beta| + 2)(2|\beta|)^{|\beta|} e^{-r_0^{1/\alpha}/2} < \rho.$$

Die letzte Ungleichung können wir schon in Beziehung auf r_0 auslösen. Es bringt die Abschätzung $|\mu(z)| := |\mu(z, r_0)| \le \rho$ für $\beta < 0$ und $r_0 = \max\{(|\beta| + 1)^\alpha, 2|z|, (-2\ln(\pi\rho/(6(|\beta| + 2)(2|\beta|)^{|\beta|}))^\alpha\}$. ■

C) $q < |z|,\ 1 < \alpha$. In diesem Fall verwenden wir die Rekursionsformel (siehe Dzherbashyan [10])

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2m+1} \sum_{h=-m}^{m} E_{\alpha/(2m+1),\beta}(z^{1/(2m+1)} e^{2\pi i h/(2m+1)}),\ m = 1, 2, 3, \dots\ . \tag{3.10}$$

Um der Fall C) auf die Fälle B) und A) zurückzuführen, nehmen wir in der Formel (3.10) $m = [(\alpha - 1)/2] + 1$. Dann wird es $0 < \alpha/(2m + 1) \le 1$ und wir berechnen die Funktionen $E_{\alpha/(2m+1),\beta}(z^{1/(2m+1)} e^{2\pi i h/(2m+1)})$ wie im Falle A) wenn $|z|^{1/(2m+1)} \le q < 1$ ist und wie im Falle B) wenn $|z|^{1/(2m+1)} > q$.

4. Numerische Berechnung der Ableitung der Mittag-Leffler Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$

In vielen Fragen der Analysis spielt die Ableitung einer Funktion eine wichtige Rolle. Wir werden u.a. die Ableitung der Mittag-Leffler-Funktion in Iterationsverfahren für Bestimmung ihrer Nullstellen in der komplexen Ebene verwenden. Da die Mittag-Leffler-Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ eine ganze Funktion ist, können wir die Potenzreihe (1.2) gliedweise differenzieren und bekommen die Darstellung

$$E'_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\beta+\alpha k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)z^k}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k)}. \tag{4.1}$$

Für numerische Berechnung der Funktion $E'_{\alpha,\beta}(z)$ mit gegebener Genauigkeit ρ unterscheiden wir zwei Fälle: A) $|z| \le q < 1$ (q ist eine fixierte Zahl) und B) $|z| > q$.

A) $|z| \le q < 1$.

SATZ 4.1: *Im Falle $|z| \le q < 1$ läßt sich die die Ableitung (4.1) der Mittag-Leffler Funktion mit Hilfe der Formel*

$$E'_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{(k+1)z^k}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k)} + \mu(z), \ |\mu(z)| \le \rho, \tag{4.2}$$

$$k_0 = \max\{k_1, \ [\ln(\rho(1-|z|))/\ln(|z|)]+1\},$$

$$k_1 = \begin{cases} [(2-\alpha-\beta)/(\alpha-1)]+1, & \alpha > 1, \\ [(3-\alpha-\beta)/\alpha]+1, & 0 < \alpha \le 1, \ D \le 0, \\ \max\{\left[\frac{3-\alpha-\beta}{\alpha}\right]+1, \left[\frac{1-2\omega\alpha+\sqrt{D}}{2\alpha^2}\right]+1\}, & 0 < \alpha \le 1, \ D > 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\omega = \alpha+\beta-\frac{3}{2}, \ D = \alpha^2 - 4\alpha\beta + 6\alpha + 1$$

mit der gegebenen Genauigkeit $\rho > 0$ berechnen.

Beweis: Mit Hilfe der Formel (4.1) stellen wir die Ableitung der Mittag-Leffler-Funktion in der Form

$$E'_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(k+1)z^k}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k)} + \mu(z,m)$$

mit

$$\mu(z,m) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(k+1)z^k}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k)}$$

dar und schätzen den Betrag von $\mu(z,m)$ ab. Weil $\Gamma(x) \geq 1$ ist, falls $x \geq 1$, haben wir die Ungleichungen

$$\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k) = (\alpha+\beta+\alpha k-1)\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k-1) \geq \alpha+\beta+\alpha k-1 \geq k+1 \quad (4.4)$$

falls

$$\alpha > 1,\ k \geq k_1 = [(2-\alpha-\beta)/(\alpha-1)] = 1,$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k) &= (\alpha+\beta+\alpha k-1)(\alpha+\beta+\alpha k-2)\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k-2) \quad (4.5)\\ &\geq (\alpha+\beta+\alpha k-1)(\alpha+\beta+\alpha k-2) \geq k+1\end{aligned}$$

falls

$$0 < \alpha \leq 1,\ k \geq k_1,$$

mit gegebener durch die Formel (4.3) natürlicher Zahl k_1. Aus (4.4), (4.5) folgt die Abschätzung

$$|\mu(z,m)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left| \frac{(k+1)z^k}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k)} \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |z|^k = \frac{|z|^m}{1-|z|},\ m \geq k_1,$$

wo k_1 wurde bei Formel (4.3) definiert, und wir haben schließlich

$$|\mu(z)| := |\mu(z,k_0)| \leq \rho,\ k_0 = \max\{k_1,\ [\ln(\rho(1-|z|))/\ln(|z|)]+1\}.$$

■

B) $|z| > q$.

In diesem Fall verwenden wir die Formel (siehe Dzherbashyan [10])

$$E'_{\alpha,\beta}(z) = \frac{E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(z)}{\alpha z}, \quad (4.6)$$

die die Berechnung der Ableitung der Mittag-Leffler-Funktion auf die schon ausgearbeitete Berechnung der Funktion $E_{\alpha,\beta}(z)$ zurückführt.

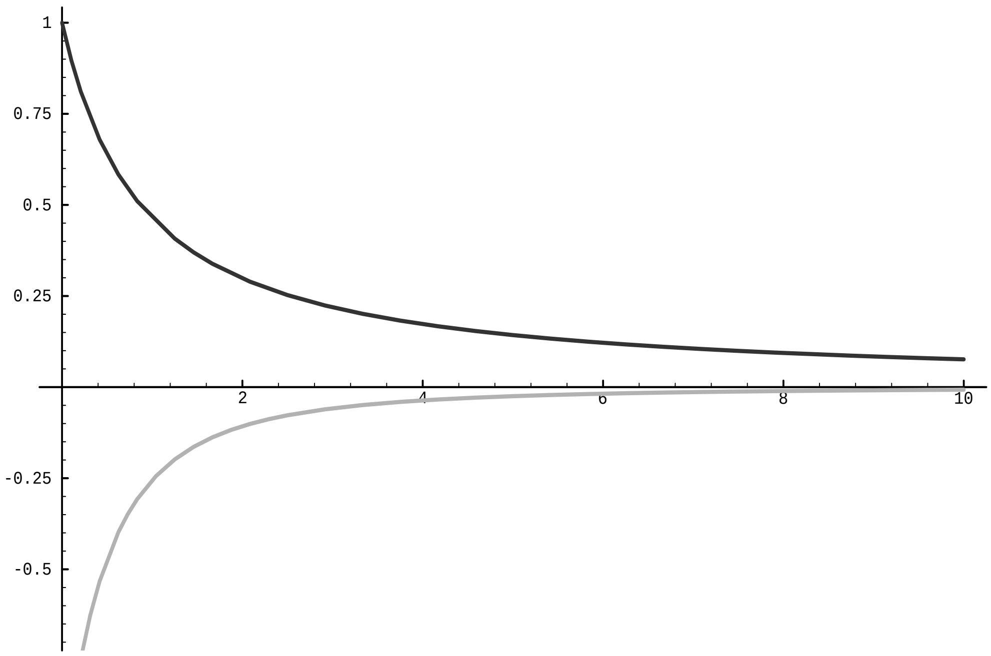

Figure 4.5: $E_{\alpha,\beta}(-t)$ für $\alpha = 0.25,\ \beta = 1$ und ihrer Ableitung. Schwarze Linie – $E_{\alpha,\beta}(-t)$, graue Linie – $\frac{d}{dt}(E_{\alpha,\beta}(-t))$

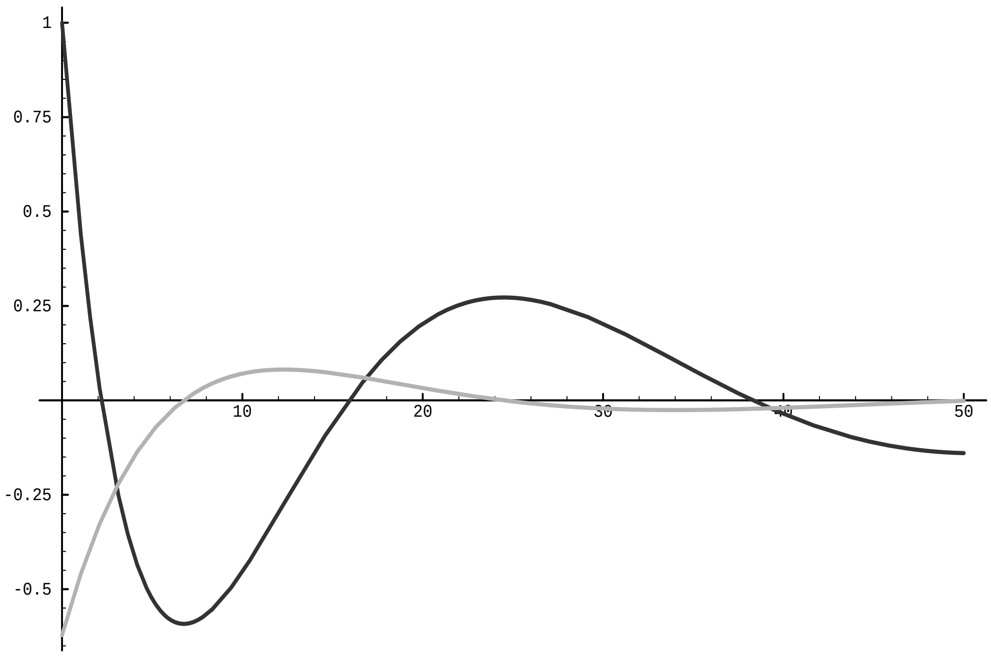

Figure 4.6: $E_{\alpha,\beta}(-t)$ für $\alpha = 1.75$, $\beta = 1$ und ihrer Ableitung. Schwarze Linie – $E_{\alpha,\beta}(-t)$, graue Linie – $\frac{d}{dt}(E_{\alpha,\beta}(-t))$

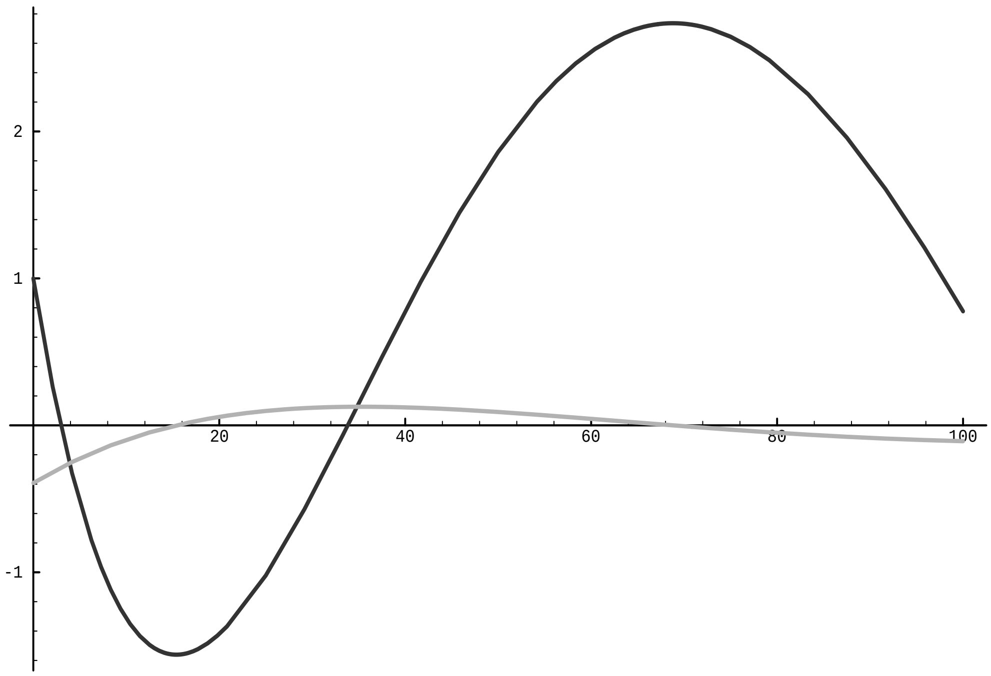

Figure 4.7: $E_{\alpha,\beta}(-t)$ für $\alpha = 2.25$, $\beta = 1$ und ihrer Ableitung. Schwarze Linie – $E_{\alpha,\beta}(-t)$, graue Linie – $\frac{d}{dt}(E_{\alpha,\beta}(-t))$

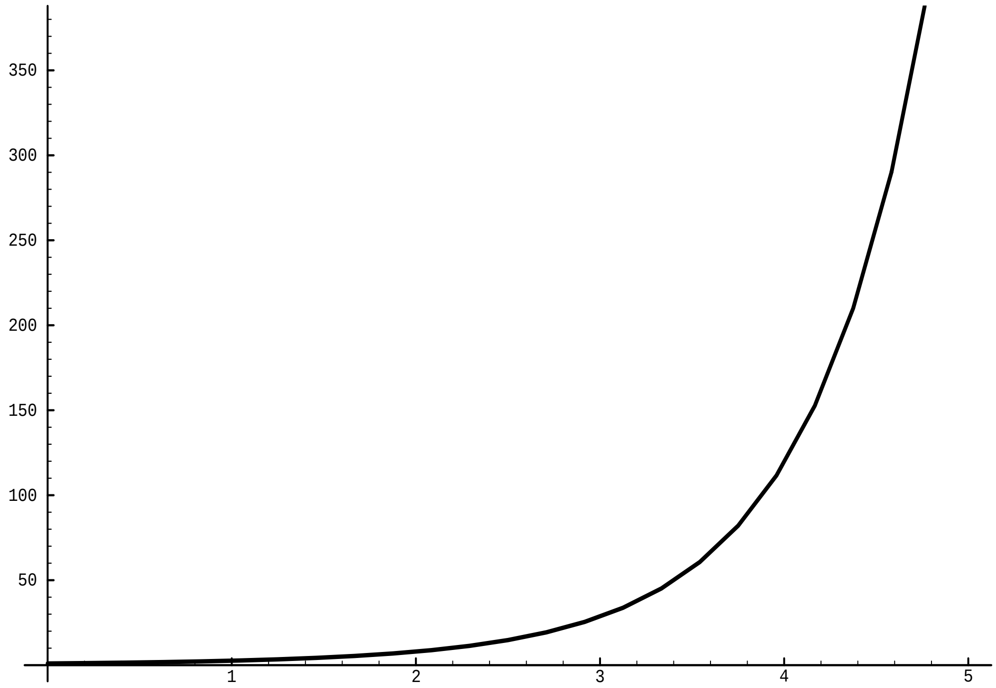

Figure 4.8: $|E_{\alpha,\beta}(z)| \to \infty$ für $\alpha = 0.75,\ \beta = 1,\ \arg(z) = \frac{\alpha\pi}{4}$

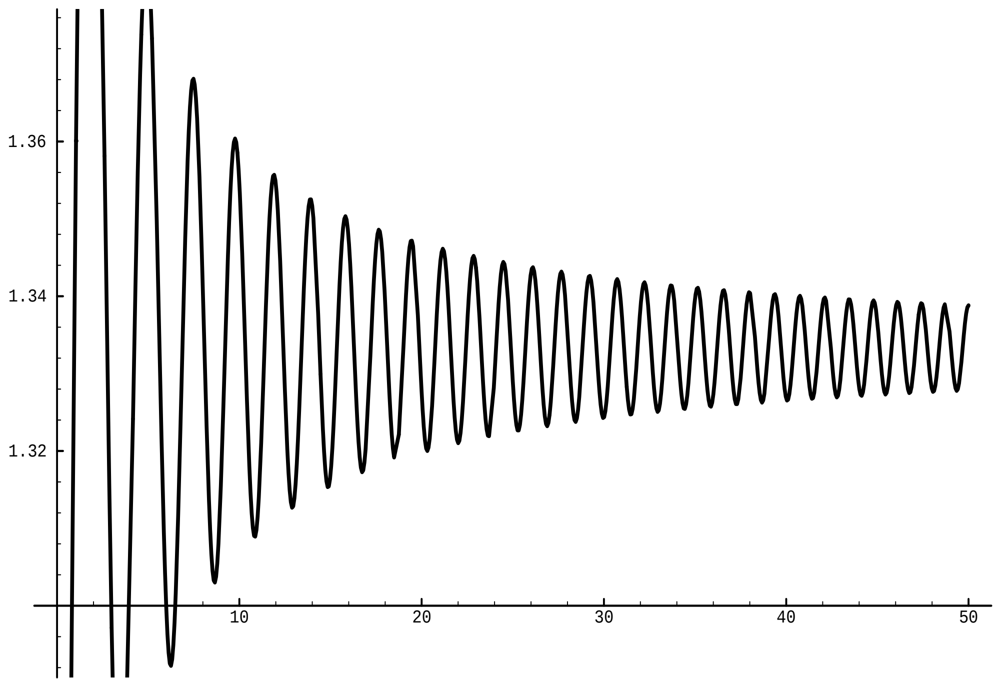

Figure 4.9: $|E_{\alpha,\beta}(z)| \to \frac{1}{\alpha}$ für $\alpha = 0.75,\ \beta = 1,\ \arg(z) = \frac{\alpha\pi}{2}$

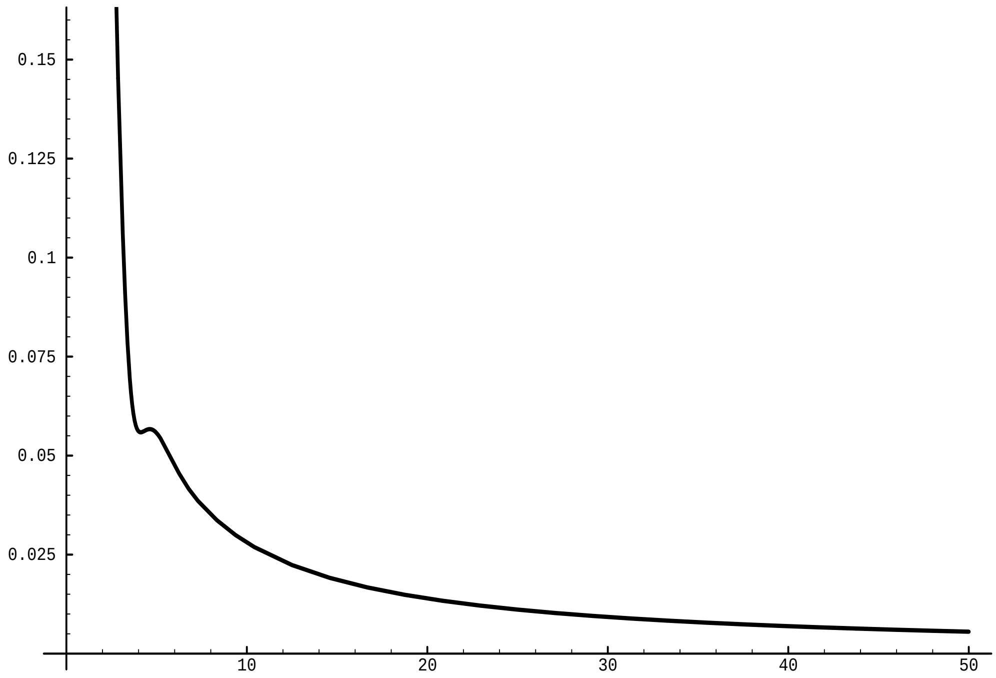

Figure 4.10: $|E_{\alpha,\beta}(z)| \to 0$ für $\alpha = 0.75,\ \beta = 1,\ \arg(z) = \frac{3\alpha\pi}{4}$

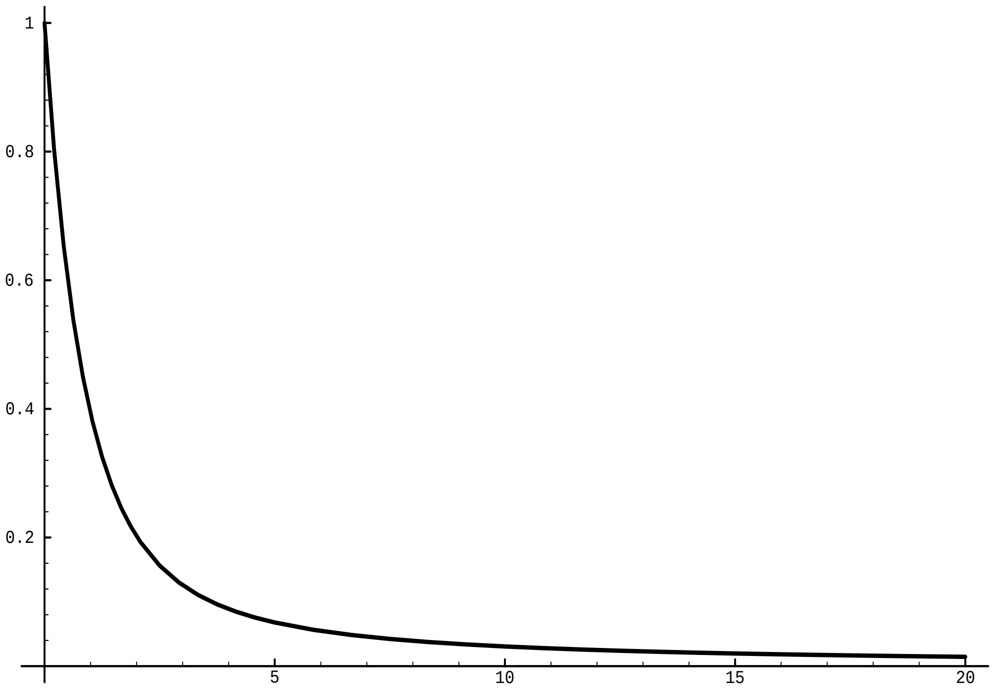

Figure 4.11: $E_{\alpha,\beta}(z)$ für $\alpha = 0.75,\ \beta = 1,\ \arg(z) = \pi$

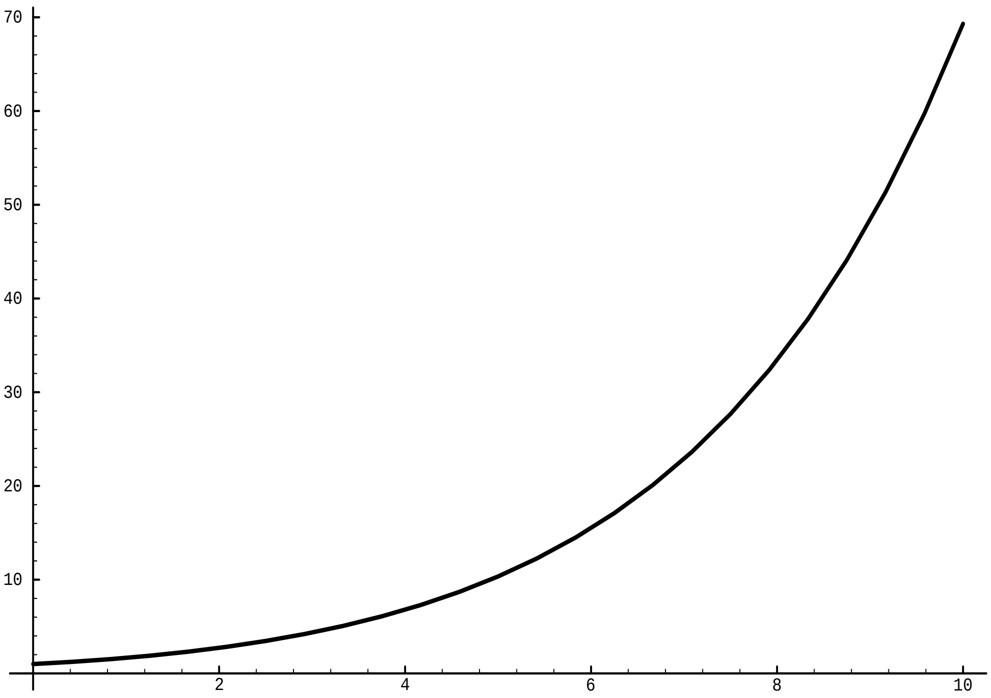

Figure 4.12: $|E_{\alpha,\beta}(z)| \to \infty$ für $\alpha = 1.25,\ \beta = 1,\ \arg(z) = \frac{\alpha\pi}{4}$

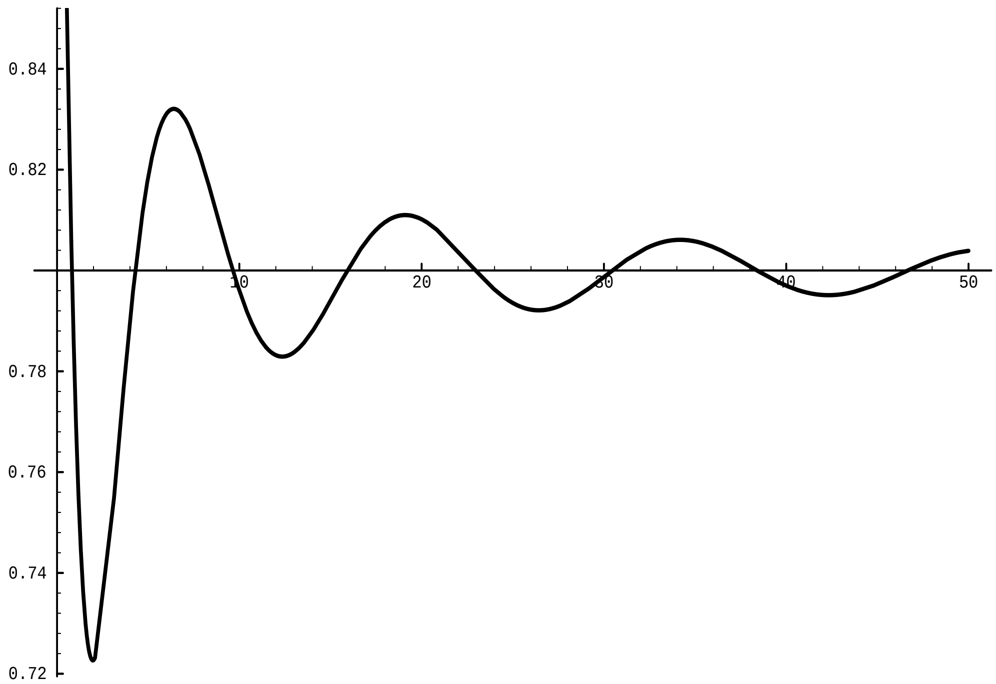

Figure 4.13: $|E_{\alpha,\beta}(z)| \to \frac{1}{\alpha}$ für $\alpha = 1.25,\ \beta = 1,\ \arg(z) = \frac{\alpha\pi}{2}$

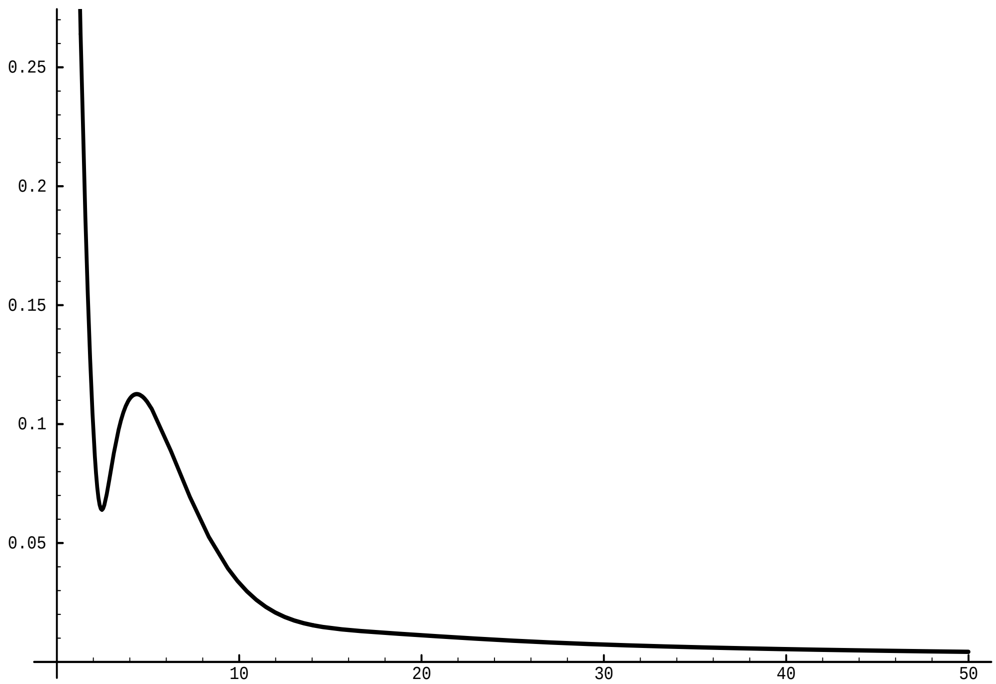

Figure 4.14: $|E_{\alpha,\beta}(z)| \to 0$ für $\alpha = 1.25,\ \beta = 1,\ \arg(z) = \frac{3\alpha\pi}{4}$

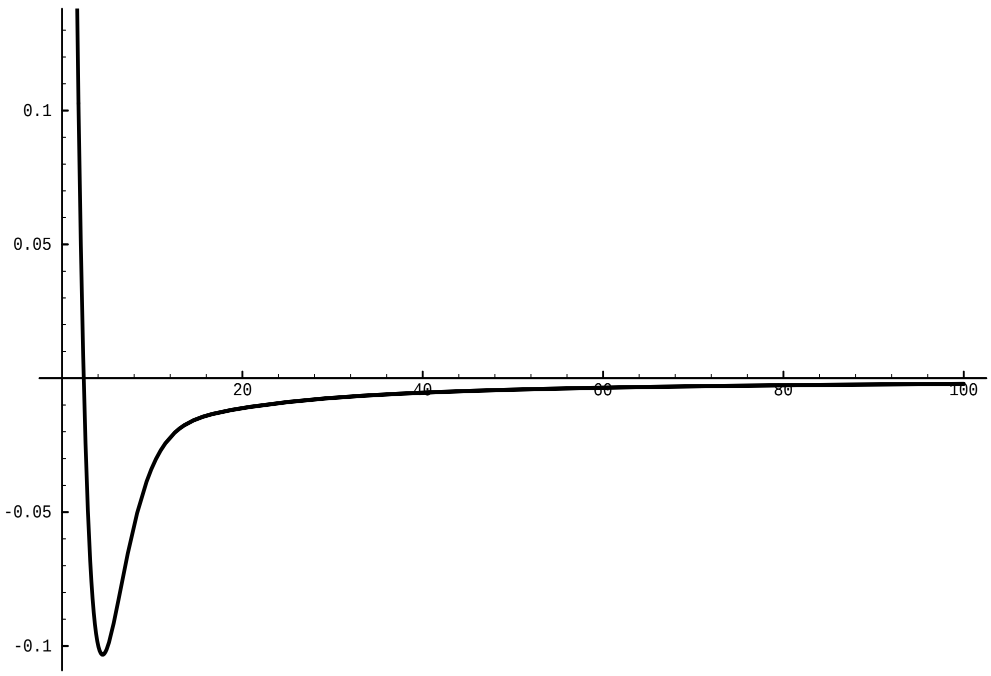

Figure 4.15: $E_{\alpha,\beta}(z)$ für $\alpha = 1.25,\ \beta = 1,\ \arg(z) = \pi$

Bibliography

[1] **Agarwal R.P.,** A propos d'une note de M. Pierre Humbert, *C. r. Acad. Sci. Paris*, **236**(1953), 2031-2032.

[2] **Babenko Yu.I.,** *Heat and Mass Transfer*, Leningrad, Khimiya, 1986 (in Russian).

[3] **Bagley R.L. and Torvik P.J,** On the appearence of the fractional derivative in the behaviour of real materials, *J. Appl. Mech.* **51** (1984), 294-298.

[4] **Blair G.W.S.,** Psychorheology: links between the past and the present, *Journal of Texture Studies*, **5**(1974), 3-12.

[5] **Blair G.W.S,** The role of psychophysics in rheology, *J. of Colloid Sciences*, 1947, 21-32.

[6] **Buhl A.,** *Séries analytique. Sommabilité*, Mem. Sci. Math. Fasc. 7, Gauthier-Villars, Paris.

[7] **Caputo M. and Mainardi F.,** Linear models of dissipation in anelastic solids, *Riv. Nuovo Cimento*, Ser II, **1** (1971), 161-198.

[8] **Cleota and Hughes,** Asymptotic developments of certain integral functions, *Duke Math. J.*, **9**(1942), 791-802.

[9] **Dzherbashyan M.M.,** About integral representation of functions continuous on some rays (generalization of Fourier integral), *Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR, Ser. Mat.*, **18**(1954), 427-448. (In Russian).

[10] **Dzherbashyan M.M.,** *Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Plane*, Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).

[11] **El-Sayed A.M.A.,** Fractional order diffusion-wave equation, *J. of Theoretical Physics* **35**, No 2 (1996), 371-382.

[12] **Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F.G.,** *Higher Transcendental Functions*, Vol. 3, New York, McGraw-Hill Book Co., 1954.

[13] **Gorenflo R. and Mainardi F.,** Fractional oscillations and Mittag-Leffler functions, Preprint No. A-14/96, Free University of Berlin, Berlin, 1994.

[14] **Gorenflo R. and Mainardi F.,** The Mittag-Leffler function in the Riemann-Liouville fractional calculus, In: Kilbas A.A. (eds.) *Boundary value problems, special functions and fractional calculus*", Minsk, 1996, 215-225.

[15] **Gorenflo R. and Mainardi F.,** Fractional Culculus: Introduction to Integral and Differential Equations of Fractional Order, in: *Fractals and Fractional Culculus in Continuum Mechanics* (Ed. A. Carpinteri and F. Mainardi), Springer Verlag, Wien, 1997.

[16] **Gorenflo R. and Rutman R.,** On ultraslow and intermediate processes, In: Rusev P., Dimovski I. and Kiryakova V. (eds.) *Transform methods and special functions*, Sofia, 1994, 61-81.

[17] **Gorenflo R. and Vessella S.,** *Abel Integral Equations: Analysis and Applications*, Lecture Notes in Mathematics **1461**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[18] **Humbert P.,** Quelques resultats relatifs a la fonction de Mittag-Leffler, *C. r. Acad. sci. Paris*, **236**(1953), 1467-1468.

[19] **Humbert P. and Agarwal R.P.,** Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations, *Bull. sci. math. (2)*, **77**(1953), 180-185.

[20] **Mainardi F.,** Fractional Culculus: Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics, in: *Fractals and Fractional Culculus in Continuum Mechanics* (Ed. A. Carpinteri and F. Mainardi), Springer Verlag, Wien, 1997.

[21] **Schneider W.R. and Wyss W.,** Fractional diffusion and wave equations, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 134-144.

[22] **Slonimski G.L.,** About a low of deformation of polymers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (Physic)*, **140**(1961), No 2, 343-346.

[23] **Westerlund S. and Ekstam L.,** Capacitor theory, *IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation* **1**, No 5 (1994), 826-839.

[24] **Wiman A.,** Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Math.*, **29**(1905), 191-201.

[25] **Wiman A.,** Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Math.*, **29** (1905), 217-234.