Grenzwertsätze für Lösungen stochastischer Differenzengleichungen in Banach-Räumen mit Anwendungen

Valerij Koval*
Hochschule für Gerätebau
Rusjkastraße 56
282001 Ternopil, Ukraine

Rainer Schwabe†
Freie Universität Berlin
1. Mathematisches Institut
Arnimallee 2–6
D-14 195 Berlin, Deutschland

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden exakte Konvergenzraten vom Typ des Gesetzes des iterierten Logarithmus für rekursive stochastische Differenzengleichungen in Banach-Räumen untersucht. Zur Illustration werden die Resultate auf autoregressive Prozesse endlicher Ordnung angewandt.

1. Einleitung

Es sei $\mathbb{B}$ ein reeller, separabler Banach-Raum mit Norm $||\cdot||$ und $L(\mathbb{B})$ der Raum der beschränkten linearen Operatoren auf $\mathbb{B}$. In $\mathbb{B}$ betrachten wir die Rekursionsformel

$$X_n = A_n X_{n-1} + D_n V_n, \qquad n \geq 1, \tag{1.1}$$

in der X_0, V_n und A_n, D_n zufällige Elemente in $\mathbb{B}$ bzw. $L(\mathbb{B})$ sind. Es wird vorausgesetzt, daß die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} ||A_n - A|| = 0 \qquad \text{fast sicher (f. s.)} \tag{1.2}$$

erfüllt ist, wobei $A \in L(\mathbb{B})$ und der Spektralradius r von A kleiner als 1 ist, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} = r < 1. \tag{1.3}$$

*Diese Arbeit entstand während eines durch den Deutschen Akademischen Austauschdienstes geförderten Aufenthaltes an der Freien Universität Berlin

†gefördert durch das Forschungsprojekt Ku719/2-1 der Deutschen Forschungsgemeinschaft

(c_n) sei eine nichtwachsende Folge von positiven Zahlen mit $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Wir interessieren uns für Bedingungen, unter denen die Eigenschaft

$$\limsup_{n\to\infty} \; c_n \left\| \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i \right\| = \alpha \qquad \text{f. s.} \tag{1.4}$$

gültig ist, wobei α eine zufallsunabhängige Konstante $(0 < \alpha < \infty)$ ist.

Analoge Probleme wurden insbesondere in den Publikationen von Chen und Guo (1988) und Bosq (1993) untersucht. In der ersten dieser beiden Arbeiten wird vorausgesetzt, daß der zugrundeleigende Banach-Raum $I\!B$ der Euklidische Raum $I\!R^m$ und die Folge (V_n) eine stationäre, ergodische Martingaldifferenzfolge ist. In der zweiten wurde vorausgesetzt, daß die Operatorfolge (A_n) konstant A und die Operatorfolge D_n konstant gleich dem identischen Operator I ist und daß (V_n) eine Folge von identisch verteilten zufälligen Elemente mit endlichem Erwartungswert $E||V_1||^{2+\delta} < \infty$ für ein $\delta > 0$ ist. Insbesondere wird in beiden Arbeiten der Fall $c_n = (n \log\log n)^{-1/2}$ betrachtet. In den Arbeiten von Koval (1992) und Pechtl (1993) wurde ein log log-Invarianzprinzip für die Lösungen (X_n) der Gleichung (1.1) im Fall $D_n \equiv I$ (bzw. unter der zusätzlichen Voraussetzung $A_n \equiv A$) hergeleitet. In der vorliegenden Arbeit soll eine Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnisse geleistet werden.

Es ist hervorzuheben, daß die Untersuchung der Eigenschaft (1.4) sowohl von selbstständigem Interesse ist, als auch viele verschiedene Anwendungen hat. Einige von diesen wurden von Chen und Guo (1988) und Bosq (1993) vorgestellt. Eine weitere wichtige Anwendung der Eigenschaft (1.4) wird in der vorliegenden Arbeit aufgezeigt, die in direkter Verbindung zur Methode der schrittweisen Näherung bei stochastischen Störungen steht (siehe Polyak, 1990, Polyak und Juditsky, 1992).

2. Das Hauptergebnis und Folgerungen daraus

Wir betrachten die Gleichung (1.1) und setzen im weiteren voraus, daß (c_n) eine beliebige, festgehaltene, nichtwachsende Folge von positiven Zahlen ist mit $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Satz 1. Die Voraussetzungen (1.2) und (1.3) seien erfüllt und es gelte

$$\lim_{n\to\infty} ||D_n - D|| = 0 \quad \text{f. s.} \tag{2.1}$$

mit $D \in L(\mathbb{B})$,

$$\lim_{n\to\infty} c_n \sum_{i=1}^{n} c_i^{-1} ||A_i - A_{i+1}|| = 0 \quad \text{f. s.}, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n \sum_{i=1}^{n} c_i^{-1} ||D_i - D_{i+1}|| = 0 \quad \text{f. s.}, \tag{2.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n ||V_n|| = 0 \quad \text{f. s.} \tag{2.4}$$

Genügen die zufälligen Elemente (V_n) zusätzlich der Voraussetzung

$$\sup_n c_n \left\| \sum_{i=1}^{n} V_i \right\| < \infty \quad \text{f. s.}, \tag{2.5}$$

dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n \left\| \sum_{i=1}^{n} X_i - (I - A)^{-1} D \sum_{i=1}^{n} V_i \right\| = 0 \quad \text{f. s.} \tag{2.6}$$

Bemerkung 1. Die Voraussetzung (2.5) ist immer dann erfüllt, wenn die Folge (V_n) einer Form des Gesetzes vom iterierten Logarithmus genügt.

Bemerkung 2. Für $c_n = (n \log\log n)^{1/2}$ gilt die Voraussetzung (2.4), wenn zum Beispiel:

a) (V_n) eine Folge von identisch verteilten zufälligen Elemente mit $E||V_1||^2 < \infty$ ist; oder

b) (V_n) eine Folge von zufälligen Elemente ist, mit $\sup_n E||V_n||^{2+\delta} < \infty$ für ein $\delta > 0$.

Weiterhin, ist (V_n) eine Folge von unabhängigen zufälligen Elemente und $c_n = (s_n^2 \log\log s_n^2)^{-1/2}$ mit $s_n = \sup_{||f||\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} Ef^2(V_i)\right)^{1/2}$, $f \in \mathbb{B}^*$, dann folgt die Voraussetzung (2.4) aus der Beziehung für das Wachstum der Folge (V_n) im klassischen Gesetz vom iterierten Logarithmus von Kolmogorov (siehe Ledoux und Talagrand, 1991, § 8).

Bemerkung 3. Wir betrachten von den formal ähnlichen Voraussetzungen (2.2) und (2.3) exemplarisch (2.2). Ist z. B. $A_n = A + a_n T$, $n \ge 1$, T ein zufälliges Element in $L(\mathbb{B})$, $a_n \in \mathbb{R}$ und $c_n = (n \log\log n)^{-1/2}$, dann gilt (2.2), falls die Bedingung $\sup_n n^\nu |a_n - a_{n+1}| < \infty$ für ein $\nu > 1$ erfüllt ist. Insbesondere gilt diese Bedingung für $a_n = n^{-\gamma}$ mit $\gamma > 0$.

Bemerkung 4. Auf Grund der Voraussetzung (1.3) ist die Existenz des inversen beschränkten linearen Operators $(I-A)^{-1}$ gesichert.

Als nächstes betrachten wir einige Folgerungen aus Satz 1.

Folgerung 1. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\ c_n \left\| \sum\nolimits_{i=1}^n X_i \right\| = \limsup_{n\to\infty}\ c_n \left\| (I-A)^{-1} D \sum\nolimits_{i=1}^n V_i \right\| \qquad \text{f. s.}$$

Folgerung 2. Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, existiert der inverse Operator $D^{-1} \in L(\mathbb{B})$ und ist

$$\limsup_{n\to\infty}\ c_n \left\| \sum\nolimits_{i=1}^n V_i \right\| = v \qquad \text{f. s.}$$

für eine endliche Konstante v erfüllt, dann gilt

$$\frac{v}{||D^{-1}(I-A)||} \le \limsup_{n\to\infty}\ c_n \left\| \sum\nolimits_{i=1}^n X_i \right\| \le ||(I-A)^{-1}D||\ v \qquad \text{f. s.} \tag{2.7}$$

Folgerung 3. Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, existiert $D^{-1} \in L(\mathbb{B})$ und gilt

$$\lim_{n\to\infty} d\,(c_n \sum\nolimits_{i=1}^n V_i\,, K) = 0 \qquad \text{f. s.,}$$

wobei $d\,(x, K)$ der Abstand des Punktes x von der Menge K der Limespunkte der Folge $(c_n \sum_{i=1}^n V_i)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 ist, dann ist $(I-A)^{-1}DK$ die Menge der Limespunkte der Folge $(c_n \sum_{i=1}^n X_i)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} d\left(c_n \sum\nolimits_{i=1}^n X_i, (I-A)^{-1}DK\right) = 0 \qquad \text{f. s.}$$

Bemerkung 5. Die Folgerungen 2 und 3 stellen Verallgemeinerungen der entsprechenden Sätze in den Arbeiten von Chen und Guo (1988) und Bosq (1993) dar. Insbesondere folgt aus (2.6) ein $\log\log$-Invarianzprinzip für die Lösungen (X_n) der Gleichung (1.1) (s. Koval, 1992, und Pechtl, 1993).

Beispiel 1. Es sei $\mathbb{B}$ ein reeller separabler Hilbert-Raum und (V_n) eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten zufälligen Elementen in $\mathbb{B}$ mit $EV_1 = 0$ und Kovarianzoperator T. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{||(I-A)^{-1}D\sum_{i=1}^n V_i||}{(n\log\log n)^{1/2}} = \big(2||(I-A)^{-1}DTD^*(I-A^*)^{-1}||\big)^{1/2} \qquad \text{f. s.},$$

wobei A^* und D^* die adjungierten Operatoren zu A und D sind (siehe Ledoux und Talagrand, 1991, § 8). Sind die Voraussetzungen (1.2), (1.3) und (2.1) bis (2.3) erfüllt, dann gilt aufgrund der Folgerung 1

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{||\sum_{i=1}^n X_i||}{(n\log\log n)^{1/2}} = \big(2||(I-A)^{-1}DTD^*(I-A^*)^{-1}||\big)^{1/2} \qquad \text{f. s.}$$

3. Beweise

Wir beweisen zuerst den Satz 1. Dazu schreiben wir die Gleichung (1.1) in der Form

$$X_n = AX_{n-1} + DV_n + (D_n - D)V_n + (A_n - A)X_{n-1}$$

um. Dann erhalten wir durch Iteration der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} X_n &= \sum\nolimits_{i=1}^n A^{n-i}DV_i + A^{n-1}A_1X_0 + \sum\nolimits_{i=1}^n A^{n-i}(D_i - D)V_i \\ &\quad + \sum\nolimits_{i=1}^{n-1} A^{n-i-1}(A_{i+1} - A)X_i\,. \end{aligned}$$

Schreiben wir nun k statt n und summieren X_k über k von 1 bis n und benutzen die Identität

$$\sum\nolimits_{k=1}^n \sum\nolimits_{i=1}^k A^{k-i}T_i = (I-A)^{-1}\sum\nolimits_{i=1}^n (I - A^{n+1-i})T_i\,.$$

so erhalten wir als Ergebnis

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{k=1}^n X_k &= (I-A)^{-1}\Big\{D\sum\nolimits_{i=1}^n V_i + (I-A^n)A_1X_0 - \sum\nolimits_{i=1}^n A^{n+1-i}D_iV_i \\ &\quad + \sum\nolimits_{i=1}^n (D_i - D)V_i + \sum\nolimits_{i=1}^{n-1}\big[A_i - A - A^{n-i}(A_{i+1} - A)\big]X_i\Big\}\,. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Abelsche Identität für die zwei letzten Summen und finden

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} X_k = (I-A)^{-1} \Big\{ & D \sum_{i=1}^{n} V_i + (I-A^n) A_1 X_0 - \sum_{i=1}^{n} A^{n+1-i} D_i V_i \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (D_i - D_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} V_j + (D_n - D) \sum_{j=1}^{n} V_j \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left[A_{i+1} - A_{i+2} - A^{n-i}(A_{i+1} - A) + A^{n-i-1}(A_{i+2} - A) \right] \sum_{j=1}^{i} X_j \Big\} .\end{aligned}$$

Wir setzen

$$Y_n = c_n \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{und} \qquad Z_n = c_n \sum_{k=1}^{n} V_k . \tag{3.1}$$

Damit können wir die letzte Beziehung in folgender Form umschreiben

$$\begin{aligned} Y_n \;=\; (I-A)^{-1} \Big\{ & D Z_n + c_n (I - A^n) A_1 X_0 - c_n \sum_{i=1}^{n} A^{n+1-i} D_i V_i \\ & + c_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{-1} (D_i - D_{i+1}) Z_i + (D_n - D) Z_n \\ & + c_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{-1} \left[A_{i+1} - A_{i+2} - A^{n-i}(A_{i+1} - A) + A^{n-i-1}(A_{i+2} - A) \right] Y_i \Big\} .\end{aligned}$$

Setzen wir noch

$$\begin{aligned} R_n &= (I-A)^{-1} \Big\{ c_n (I - A^n) A_1 X_0 - c_n \sum_{i=1}^{n} c_i^{-1} A^{n+1-i} D_i (c_i V_i) \\ &\qquad + c_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{-1} (D_i - D_{i+1}) Z_i + (D_n - D) Z_n \Big\} , \\ G_{n,i} &= (I-A)^{-1} c_n c_i^{-1} \left[A_{i+1} - A_{i+2} - A^{n-i}(A_{i+1} - A) + A^{n-i-1}(A_{i+2} - A) \right] .\end{aligned}$$

dann können wir Y_n wie folgt schreiben:

$$Y_n = (I-A)^{-1} D Z_n + R_n + \sum_{i=1}^{n-1} G_{n,i} Y_i . \tag{3.2}$$

Wir werden nun zuerst zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} ||R_n|| = 0 \; f.\,s. \tag{3.3}$$

Hierzu bezeichne im weiteren M positive Konstanten, die mit Wahrscheinlichkeit 1 endlich sind und die von Formel zu Formel unterschiedliche Werte annehmen können. Aus den Bedingungen (1.3), (2.5) und der Monotonität der Folge (c_n) ergibt sich

$$||R_n|| \le M \left(c_n + \sum_{i=1}^{n} q^{n-i} c_i ||V_i|| + c_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{-1} ||D_i - D_{i+1}|| + ||D_n - D|| \right) ,$$

wobei q eine Konstante mit $0 < q < 1$ ist. Damit folgt die Konvergenz (3.3) von $||R_n||$ gegen 0 aus den Voraussetzungen (2.1), (2.3), (2.4), $c_n \to 0$, $(n \to \infty)$ und dem Lemma von Toeplitz.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} ||G_{n,i}|| = 0 \quad \text{f. s.} \tag{3.4}$$

gilt. Dazu betrachten wir die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n-1} ||G_{n,i}|| \leq M \left(c_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{-1} ||A_{i+1} - A_{i+2}|| + \sum_{i=1}^{n} q^{n-i} ||A_i - A|| \right),$$

und die Konvergenz (3.4) folgt aus den Voraussetzungen (1.2) und (2.2) mit Hilfe des Lemmas von Toeplitz.

Nun gilt wegen (2.5) und (3.3)

$$\sup_n ||(I-A)^{-1} D Z_n + R_n|| < \infty \quad \text{f. s.}$$

und mit Bedingung (3.4) und Lemma 2 von Walk und Zsidó (1989) ergibt sich

$$M = \sup_n ||Y_n|| < \infty \quad \text{f. s.}$$

Daraus folgt entsprechend (3.2)

$$||Y_n - (I-A)^{-1} D Z_n|| \leq ||R_n|| + M \sum_{i=1}^{n-1} ||G_{n,i}||,$$

woraus mit (3.3) und (3.4) die Behauptung (2.6) folgt. □

Bemerkung 6. Anhand des Beweises des Satzes sieht man, daß statt der Voraussetzung (1.2) auch die Voraussetzung $\sum_{n=1}^{\infty} ||A^n|| < \infty$ von Bosq (1993) benutzt werden kann. Auch in diesem Fall ist das Lemma von Toeplitz anwendbar, und die Behauptung des Satzes bleibt gültig.

Als nächstes beweisen wir die Folgerungen:

Folgerung 1 ergibt sich unmittelbar aus Satz 1 und der Ungleichung (siehe für die Bezeichnungen (3.1))

$$\left| \limsup_{n\to\infty} ||Y_n|| - \limsup_{n\to\infty} ||(I-A)^{-1} D Z_n|| \right| \leq \limsup_{n\to\infty} ||Y_n - (I-A)^{-1} D Z_n||.$$

Für Folgerung 2 ergibt sich die obere Abschätzung (2.7) aus Folgerung 1. Für die untere Abschätzung (2.7) benutzen wir die Beziehung (3.2). Da der Operator $D^{-1} \in L(\mathbb{B})$ nach Voraussetzung existiert, gilt

$$D^{-1}(I-A)Y_n = Z_n + D^{-1}(I-A)\left(R_n + \sum_{i=1}^{n-1} G_{n,i}Y_i\right)$$

und somit, mit Wahrscheinlichkeit 1,

$$v = \limsup_{n\to\infty} ||Z_n|| = \limsup_{n\to\infty} ||D^{-1}(I-A)Y_n|| \leq ||D^{-1}(I-A)|| \limsup_{n\to\infty} ||Y_n|| .$$

Hieraus ergibt sich die untere Abschätzung (2.7).

Die Folgerung 3 wird mit Hilfe von Standard-Argumenten auf Grund der Resultate des Satzes 1 bewiesen.

4. Anwendungen auf Differenzengleichungen m-ter Ordnung in $\mathbb{R}$

Wir betrachten eine Differenzengleichung

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_m x_{n-m} + v_n, \quad n \geq 1, \tag{4.1}$$

in $\mathbb{R}$ mit festen, reellwertigen Koeffizienten $a_1, \cdots a_m$, in der $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{1-m}$ und v_n, $n \geq 1$, zufällige Größen sind. Die charakteristische Gleichung zu (4.1) ist

$$\lambda^m - (a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m) = 0. \tag{4.2}$$

Satz 2. Liegen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4.2) im Kreis mit Radiuslänge 1 in der komplexen Ebene, genügen die Folgen (c_n) und (v_n) den Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-i}} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n |v_n| = 0 \text{ f. s.} \tag{4.4}$$

und

$$\sup_n c_n \left|\sum_{i=1}^n v_i\right| < \infty \quad \text{f. s.}, \tag{4.5}$$

dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\ c_n \left|\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i\right| = \frac{1}{|1-\sum_{k=1}^{m} a_k|} \limsup_{n\to\infty}\ c_n \left|\sum\nolimits_{i=1}^{n} v_i\right| \quad \text{f. s.} \tag{4.6}$$

Folgerung 4. Liegen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4.2) im Kreis mit Radiuslänge 1 in der komplexen Ebene und ist (v_n) eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten zufälligen Größen mit $Ev_1 = 0$, $Ev_1^2 = \sigma^2 < \infty$, dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\sum_{i=1}^{n} x_i|}{(n \log\log n)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{|1-\sum_{k=1}^{m} a_k|} \quad \text{f. s.}$$

Bemerkung 7. Für die Lösungen der Gleichung (4.1) wurde das starke Gesetz der großen Zahlen von Gaposhkin (1988) untersucht.

Beweis von Satz 2. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^m$ mit der Supremums-Norm $||X||_\infty = \max_{1\le k\le m} |x_k|$ für $X = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ (^{T} bezeichnet die Transposition). Wir setzen

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-m+1} \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und betrachten die Gleichung

$$X_n = AX_{n-1} + V_n, \quad n \ge 1,$$

in $\mathbb{R}^m$. Die Matrix A ist eine Frobenius-Matrix und ihr charakteristisches Polynom ist gegeben durch

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^m - (a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m). \tag{4.7}$$

Auf Grund der Voraussetzungen des Satzes ist der Spektralradius der Matrix A kleiner als eins. Daher erhalten wir, wegen (4.4) und (4.5), und auf Grund der Folgerung 1,

$$\limsup_{n\to\infty} c_n \left\| \sum\nolimits_{i=1}^n X_i \right\| = \limsup_{n\to\infty}\ c_n \left\| (I-A)^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^n V_i \right\| \qquad \text{f. s.} \tag{4.8}$$

Im folgenden schreiben wir diese Beziehung in Koordinaten um. Wir betrachten zuerst $(I-A)^{-1}$. Wegen $\sum_{i=1}^n V_i = (\sum_{i=1}^n v_i, 0, \ldots, 0)^T$, ist es ausreichend, nur die erste Spalte der Matrix $(I-A)^{-1}$ zu bestimmen. Man kann zeigen, daß diese Spalte nur die Elemente 1 enthält. Außerdem folgt mit $\lambda = 1$ aus (4.7), daß $\det(I-A) = 1 - \sum_{k=1}^m a_k \neq 0$ gilt. Deshalb ist

$$\left\| (I-A)^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^n V_i \right\| = \frac{1}{|1 - \sum_{k=1}^m a_k|} \left| \sum\nolimits_{i=1}^n v_i \right|.$$

Damit können wir (4.8) wie folgt umschreiben:

$$\limsup_{n\to\infty}\ c_n \max\nolimits_{1\le k\le m} \left| \sum\nolimits_{i=2-k}^{n+1-k} x_i \right| = \frac{1}{|1 - \sum_{k=1}^m a_k|} \limsup_{n\to\infty}\ c_n \left| \sum\nolimits_{i=1}^n v_i \right| \qquad \text{f. s.}$$

Weiter benutzen wir die Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty}\ \max\{p_n, q_n\} = \max\{\limsup_{n\to\infty} p_n, \limsup_{n\to\infty} q_n\},$$

beachten Bedingung (4.3) und erhalten die Behauptung des Satzes. □

Der Beweis der Folgerung 4 folgt aus der (4.6) mit $c_n = (2\sigma^2 n \log\log n)^{-1/2}$ und dem klassischen Gesetz vom iterierten Logarithmus von Hartman und Wintner.

Bemerkung 8. Satz 2 läßt sich in naheliegender Weise auf Differenzengleichungen m-ter Ordnung mit variierenden Koeffizienten

$$x_n = a_{1n} x_{n-1} + a_{2n} x_{n-2} + \ldots + a_{mn} x_{n-m} + b_n v_n, \quad n \ge 1,$$

verallgemeinern.

5. Anwendungen auf die Mittelungsmethode

Wir betrachten die Operatorengleichung

$$x = Ax + b \tag{5.1}$$

in einem separablen Banach-Raum $\mathbb{B}$ mit $b \in \mathbb{B}$, wenn der Spektralradius von $A \in L(\mathbb{B})$ kleiner als 1 ist. Die Lösung θ dieser Gleichung wird mit der Methode der schrittweisen Näherung gesucht

$$x_n = Ax_{n-1} + b\,, \quad n \geq 1, \quad x_0 \in \mathbb{B}.$$

Bei zufälligen Störungen (V_n) (zum Beispiel: Rechenfehlern) haben wir

$$Y_n = AY_{n-1} + b + V_n\,, \quad n \geq 1, \quad Y_0 \in \mathbb{B}. \tag{5.2}$$

Dann kann das Auffinden der approximativen Lösung $\widehat{\theta}_n$ der Gleichung (5.1) mit Hilfe der Mittelungsmethode verwirklicht werden (Polyak, 1990, Polyak und Juditsky, 1992)

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} Y_i\,.$$

Wir wollen die Geschwindigkeit von $||\widehat{\theta}_n - \theta|| \to 0$ $(n \to \infty)$ f. s. bei dieser Methode abschätzen. Wir setzen voraus, daß

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{||\sum_{i=1}^n V_i||}{(n \log\log n)^{1/2}} \leq v \qquad \text{f. s.}$$

Wir setzen $X_n = Y_n - \theta$. Dann ist (X_n) die Lösung der Gleichung $X_n = AX_{n-1} + V_n$, $n \geq 1$. Auf Grund der Folgerung 2 erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2} ||\widehat{\theta}_n - \theta|| = \limsup_{n\to\infty} \frac{||\sum_{i=1}^n X_i||}{(n \log\log n)^{1/2}} \leq ||(I-A)^{-1}||\, v \qquad \text{f. s.}$$

Das ist dieselbe Geschwindigkeit der Ordnung $(n^{-1} \log\log n)^{1/2}$, die auch die Methode von Robbins und Monro

$$Z_n = Z_{n-1} - \frac{1}{n}(FZ_{n-1} - f + V_n)\,, \quad n \geq 1, \quad Z_0 \in \mathbb{B},$$

zum Auffinden der Lösung θ der Gleichung $Fx = f$, $f \in I\!B$, $F \in L(I\!B)$ mit $\inf\{Re\lambda : \lambda \in \text{spec}(F)\} > \frac{1}{2}$, besitzt (Walk, 1988).

Literaturverzeichnis

[1] Bosq, D. (1993): Propriétés asymptotiques des processus autoregressifs Banachiques. Applications. *C. R. Akad. Sci. Sér. 1* **316**, 607–610.

[2] Chen, H. F. und Guo, L. (1988): Laws of iterated logarithm for state variables with applications. *Acta Math. Sin. New Ser.* **4**, 343–355.

[3] Gaposhkin, V. F. (1988): Über das Gesetz der großen Zahlen für lineare Prozesse der Autoregression. *Izv. VUZ. Matematika* **4**, 12–21 (auf russisch).

[4] Koval, V. A. (1992): Loglog-invariance principle for solutions of stochastic difference equation in a Banach space. In: Skorohod, A. V. (Hrsg.): *Random processes and infinite-dimensional analysis.* Inst. Math. Akad. Nauk Ukraine: Kiev, 57–62 (auf russisch).

[5] Ledoux, M. und Talagrand, M. (1991): *Probability in Banach Spaces.* Springer: New York.

[6] Pechtl, A. (1993): Arithmetic means and invariance principles in stochastic approximation. *J. Theor. Probab.* **6**, 153–173.

[7] Polyak, B. T. (1990): New method of stochastic approximation type. *Automat. Remote Control* **51**, 937–946.

[8] Polyak, B. T. und Juditsky, A. B. (1992): Acceleration of stochastic approximation by averaging. *SIAM J. Contr. Optimiz.* **30**, 838–855.

[9] Walk, H. (1988): Limit behaviour of stochastic approximation processes. *Statist. Decis.* **6**, 109–128.

[10] Walk, H. und Zsidó, L. (1989): Convergence of the Robbins-Monro method for linear problems in a Banach space. *J. Math. Anal. Appl.* **139**, 152–177.