Quasireguläre Abbildungen und p-harmonische Tensoren

Dirk Franke und Roland Wisk

Preprint A 1/95

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik I
Arnimallee 2-6
D-14195 Berlin
Deutschland

Berlin, 1995

Vorwort

Die vorliegende Arbeit basiert auf einem von T. Iwaniec verfaßten, 1992 in den Annals of Mathematics 136 unter dem Titel *p-harmonic tensors and quasiregular mappings* erschienenen Artikel [I1]. In dieser Arbeit werden neue Ergebnisse aus der Theorie der quasiregulären Abbildungen vorgestellt. Unter Zuhilfenahme von p-harmonischen Tensoren werden Resultate von T. Iwaniec und G. Martin [IM1] für Räume mit geradzahliger Dimension auf allgemeine Dimension erweitert.

Wir haben uns im Rahmen unserer Diplomarbeiten mit diesem Thema auseinandergesetzt und dabei einige Aspekte heraugearbeitet, die vielleicht auch außerhalb der Theorie der quasiregulären Abbildungen interessant sein können, wie zum Beispiel die Theorie der Maximalfunktionen und die inverse Hölder-Ungleichung [I2]. Dabei wird auf eine ausführliche Einführung in die Theorie der quasiregulären Abbildungen beziehungsweise der verwandten Hilfsmittel in der Beweisführung wert gelegt.

Während unserer Arbeit an diesem Thema erreichten uns unveröffentlichte Vorlesungsmanuskripte von S. Rickman [Ri2] und T. Iwaniec [I2]. Daraus konnten wir sowohl eine Bestätigung als auch neue Ideen für unsere Arbeit entnehmen.

Wir haben mit dieser Arbeit eine detaillierte Darstellung der Grundlagen und Methoden gegeben, die zu den neuesten Ergebnissen auf dem Gebiet der n-dimensionalen quasiregulären Abbildungen führen. Insofern bietet sie sich auch trotz des speziellen Hauptthemas als Einstieg in die Theorie der quasikonformen beziehungsweise quasiregulären Abbildungen in $\mathbb{R}^n$ an.

Unser ganz besonderer Dank gilt Professor I.S. Louhivaara für seine intensive und geduldige Betreuung in jeder Phase unserer Arbeit sowie Professor M. Vuorinen für die Zusendung der oben erwähnten Manuskripte. Für die Erstellung der Graphik möchten wir uns bei Ö. Kesim bedanken.

Berlin, im Januar 1995

Dirk Franke und Roland Wisk

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Theorie der quasiregulären und quasikonformen Abbildungen hat ihren Ursprung in der komplexen Funktionentheorie. Eine quasikonforme Abbildung ist ein Homöomorphismus mit beschränktem Dilatationsquotienten. Verzichtet man auf die Injektivität, kommt man zu quasiregulären Abbildungen. Quasireguläre und quasikonforme Abbildungen können als direkte Verallgemeinerungen von analytischen und konformen Abbildungen verstanden werden.

Eine erste geometrische Definition von quasikonformen Abbildungen in der komplexen Ebene führte H. Grötzsch [Gr] 1928 ein. Eine erste analytische Definition gab M.A. Lavrentieff [La] bereits 1935. C.B. Morrey jr. [Mo] kam 1938 über die Lösung eines Beltrami-Differentialgleichungssystems zu einer analytischen Definition von quasikonformen Abbildungen. Erst später konnte die Äquivalenz von geometrischer und analytischer Definition gezeigt werden. Ausführlich werden quasikonforme Abbildungen in der Ebene in [LV] behandelt.

Quasikonforme Abbildungen in höherdimensionalen euklidischen Räumen wurden erst seit Ende der 50er Jahre intensiver behandelt, besonders zu erwähnen sind [Re1], [Vä], [Vu] und [Ri1]. Parallel zur Entwicklung der Theorie der Sobolev-Räume (vergleiche dazu [GoR]) verlor die geometrische gegenüber der analytischen Definition an Bedeutung. Inzwischen werden quasikonforme Abbildungen in der Differentialgeometrie genauso wie in der Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen angewandt. Ihre Bedeutung liegt also auch in der Verbindung verschiedenster mathematischer Gebiete.

Jede n-dimensionale quasikonforme Abbildung erzeugt auf ihrem Definitionsbereich einen eigenen Riemannschen Metriktensor, bezüglich dem sie konform ist. Diese Metrik, die man auch Matrixdilatation der Abbildung nennt, wird durch die verallgemeinerte Beltrami-Gleichung festgelegt, deren schwache Lösungen die quasiregulären Abbildungen sind. Für $n \geq 3$ ist die Theorie der n-dimensionalen quasiregulären Abbildungen weitgehend nichtlinear. In geraden Dimensionen, das heißt für $n = 2l$, konnten lineare Gleichungen, vergleichbar mit dem Cauchy-Riemann-System in der komplexen Ebene, aufgestellt werden, worauf man die Calderón-Zygmund-Theorie für singuläre Integraloperatoren anwenden konnte [IM1]. In ungeraden Dimensionen wurden keine ähnlichen linearen Systeme gefunden. Um auch in diesem Fall Aussagen über quasireguläre Abbildungen zu erhalten, werden in [I1] p-harmonische Tensoren eingeführt.

In unserer Arbeit werden Grundlagen und einige Beweise zur linearen Hodge-Theorie dargestellt und der Zusammenhang zwischen quasiregulären Abbildungen und p-harmonischen Tensoren gezeigt. Dies beinhaltet eine Zuordnung zweier Differentialformen zu einer quasiregulären Abbildung und das Herleiten der A-harmonischen Gleichung für diese Differentialformen (Kapitel 4). Als Ergebnis der Calderón-Zygmund-Theorie für bestimmte nichtlineare p-harmonische Operatoren und sehr spezieller, technisch aufwendiger Rechnungen (Kapitel 5 und 7) erhält man eine Abschätzung für schwache Lösungen der A-harmonischen Gleichung (Theorem 1). Die Anwendung dieser Aussage auf quasireguläre Abbildungen führt zu einer Abschätzung vom Caccioppoli-Typ (Theorem 2). Schwach quasireguläre Abbildungen haben a priori eine geringere Regularität als quasireguläre. Theorem 3 zeigt, daß auf höhere Regularität geschlossen werden kann. Daraus ergibt sich die Quasiregularität von schwach quasiregulären Abbildungen. Aussagen über die Hebbarkeit von Singularitäten für beschränkte quasireguläre Abbildungen sind von besonderem Interesse in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Eine solche Hebbarkeitsaussage liefert Theorem 4, in dem festgestellt wird, daß jede abgeschlossene Menge mit einer Hausdorff-Dimension, die kleiner als eine von der Dimension und der Dilatation abhängige positive Zahl ist, unter beschränkten quasiregulären Abbildungen hebbar ist.

Allgemeine Notationen

Der n-dimensionale euklidische Raum $I\!R^n$ mit der Standardbasis $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ ist ausgestattet mit dem inneren Produkt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i , \qquad x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n)$$

und der induzierten Norm

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Mit GL(n)=GL$(n, I\!R)$ sei die Gruppe der linearen invertierbaren Abbildungen

$$A : I\!R^n \to I\!R^n$$

und mit S(n)=S$(n, I\!R)$ die spezielle Gruppe der symmetrischen linearen Abbildungen A mit Determinante 1 bezeichnet; A wird mit ihrer Matrix bezüglich der Standardbasis identifiziert und hat die Norm

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| .$$

Bezeichne $B(x, r)$ die n-dimensionale Kugel um $x \in I\!R^n$ mit Radius r und $\mathbf{S}^{n-1}(x, r)$ deren Oberfläche, die $(n-1)$-dimensionale Sphäre. Zur Abkürzung sei

$$B(r) = B(0, r) \qquad \mathbf{S}^{n-1} = \mathbf{S}^{n-1}(0, 1) .$$

Weiter sei $Q(x, r)$ der n-dimensionale Würfel mit Mittelpunkt x und Kantenlänge $2r$:

$$Q(x, r) = \{ y \in I\!R^n : |y_i - x_i| < r,\ i = 1, 2, ..., n \} .$$

Die Bezeichnung σB beziehungsweise σQ, $\sigma > 0$, bedeutet, daß r durch σr ersetzt wird.

Das n-dimensionale Lebesgue-Maß einer meßbaren Menge $E \subset I\!R^n$ sei mit $|E|$ bezeichnet. Der Mittelwert einer Lebesgue-integrierbaren Funktion f auf der Menge E

$$\frac{1}{|E|} \int_E f(y)\, dy$$

wird auch kürzer mit

$$⨍_E f(y)\, dy \quad \text{beziehungsweise} \quad f_E$$

bezeichnet.

Mit dem Multiindex $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ der Länge $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 ... + \nu_n = k$ lassen sich die k-ten partiellen Ableitungen einer auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definierten Funktion f schreiben als

$$\partial^\nu f \;=\; \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} ... \partial x_n^{\nu_n}} \,.$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix von $f = (f^1, ..., f^n) \,:\, \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$Df(x) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f^n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

sei mit $J(x, f)$ bezeichnet. Es werden die üblichen Bezeichnungen für die Räume beliebig oft differenzierbarer Funktionen $C^\infty(\Omega)$ beziehungsweise $C_0^\infty(\Omega)$ für solche mit kompaktem Träger verwendet. Der Dualraum von C_0^∞ ist der Raum der Schwarz-Distributionen $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

1 Einführung in die Theorie quasiregulärer Abbildungen

1.1 Sobolev-Räume

Eine der wichtigsten analytischen Grundlagen der Theorie der quasiregulären Abbildungen stellen die Sobolev-Räume dar. Der klassische Funktionenbegriff wird erweitert und man spricht von verallgemeinerten Funktionen beziehungsweise Distributionen.

Im weiteren bezeichne Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 L^p-Räume

Definition 1.1 *Mit $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, sei die Menge (der Äquivalenzklassen) von Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichnet, für die gilt*

$$\|f\|_p \;=\; \|f\|_{L^p(\Omega)} \;=\; \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \;<\; \infty \,.$$

Weiter bezeichne $L^\infty(\Omega)$ den Raum aller im wesentlichen beschränkten Lebesgue-meßbaren Funktionen mit der Norm

$$\|f\|_\infty \;=\; \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \;=\; \inf\{M : |\{x : |f(x)| > M\}| \;=\; 0\} \,.$$

Bemerkungen.
(i) Der $L^2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) \;=\; \int_\Omega f(x) g(x) \, dx \,.$$

(ii) Es gilt für beschränkte Gebiete Ω

$$L^\infty(\Omega) \;=\; \Big\{ f : \, f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega), \, \sup_{p\geq 1} \|f\|_p < \infty \Big\}$$

und für $f \in L^\infty(\Omega)$ ist $\|f\|_\infty \;=\; \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

(iii) Durch die Identifizierung von Funktionen, die fast überall übereinstimmen, wird $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, zu einem Banachraum. Die Vollständigkeit der L^p-Räume ist auch als Satz von Riesz-Fischer bekannt.

Die lokalen Räume $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, sind die Mengen der lokal L^p-integrierbaren Funktionen f, für die

$$\|f\|_{p,K,\Omega} \;=\; \left(\int_K |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \;<\; \infty$$

für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ gilt. Die Familie der Halbnormen $\|.\|_{p,K,\Omega}$ erzeugt die Topologie von $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

Die folgenden Ungleichungen spielen in der Theorie der L^p-Räume eine zentrale Rolle.

Satz 1.2 (Höldersche Ungleichung)
Seien $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $p, q > 1$. Dann ist $f \in L^r(\Omega)$ und

$$\|fg\|_{r,\Omega} \;\leq\; \|f\|_{p,\Omega}\,\|g\|_{q,\Omega}\,. \tag{1.1}$$

Ist speziell $r = 1$, so gilt

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,dx \;\leq\; \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.2}$$

Bemerkung. Ungleichung (1.1) wird oft als verallgemeinerte Hölder-Ungleichung bezeichnet, wohingegen (1.2) als die übliche Höldersche Ungleichung bekannt ist.

Die Anwendung von (1.1) impliziert das monotone Wachstum der Funktion $p \mapsto (⨍_\Omega |f|^p)^{1/p}$, das heißt

$$\left(⨍_\Omega |f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}} \;\leq\; \left(⨍_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3}$$

für $1 \leq s \leq p \leq \infty$.

In unmittelbarem Zusammenhang mit der Hölderschen Ungleichung steht die auch als Youngsche Ungleichung bekannte Aussage.

Lemma 1.3 *Seien $a, b \geq 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$ab \;\leq\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \;<\; a^p + b^q\,. \tag{1.4}$$

Satz 1.4 (Minkowski-Ungleichung für Integrale)
Seien X und Y meßbare Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $f = f(x,y)$ eine meßbare Funktion auf dem Produktraum $X \times Y$ mit dem Lebesgue-Maß $dxdy$, dann gilt für $p \geq 1$

$$\left(\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\,dx\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \;\leq\; \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} dx\,. \tag{1.5}$$

Lemma 1.5 *Seien $f, g \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, dann gilt*

$$\|f+g\|_p^p \;\leq\; 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)\,. \tag{1.6}$$

Beweis. Für festes positives $y \in I\!R$ und $p \geq 1$ betrachte man die stetig differenzierbaren Funktionen

$$f(x) \;=\; (x+y)^p \qquad \text{und} \qquad g(x) \;=\; 2^{p-1}\,(x^p + y^p)$$

für $x \geq 0$. Es gilt

$$f(y) \;=\; 2^p\, y^p \;=\; g(y)\,, \quad f(0) \;=\; y^p \;\leq\; 2^{p-1}\, y^p\,. \tag{1.7}$$

Für $0 < x < y$ ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; \frac{(x+y)^{p-1}}{2^{p-1}\,x^{p-1}} \;>\; 1\,,$$

also $f'(x) > g'(x)$. Für $x = y$ gilt

$$f'(y) \;=\; 2^{p-1}\,y^{p-1} \;=\; g'(y)\,.$$

Ist $x > y$, so wird $\frac{f'(x)}{g'(x)} > 1$ und folglich $f'(x) < g'(x)$. Mit (1.7) folgt aus den Monotonieeigenschaften

$$f(x) \;\leq\; g(x)$$

und damit die Behauptung (1.6). □

Als eine wichtige Verallgemeinerung der Stetigkeit läßt sich die L^p-Stetigkeit betrachten. Für die Beweise der nachfolgenden Aussagen sei auf Standardwerke der Maß- und Integrationstheorie (zum Beispiel [Mun]) und insbesondere auf [GoR] und [I2] verwiesen.

Definition 1.6 *Sei $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann heißt f L^p-stetig in $a \in \Omega$ (oder a Lebesgue-Punkt von f), wenn*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(a,r)} |f(x) - f(a)|^p\, dx \;=\; 0\,.$$

Satz 1.7 *Sei $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist f fast überall in Ω L^p-stetig und für jeden Punkt $a \in \Omega$, in dem f L^p-stetig ist, gilt*

$$f(a) \;=\; \lim_{r \to 0} \fint_{B(a,r)} f(x)\, dx\,.$$

Das folgende sich aus Satz 1.7 ergebende Korollar 1.9 findet im Abschnitt 6.1 in der Theorie der Maximalfunktionen seine Anwendung. Dazu wird der Begriff der K-Regularität einer Menge benötigt.

Definition 1.8 *Eine meßbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt K-regulär, $1 \leq K < \infty$, wenn es eine Kugel B mit $B \subset E \subset KB$ gibt.*

Korollar 1.9 *Sei $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dann ist f genau dann L^p-stetig in $a \in \Omega$, wenn*

$$\lim_{j \to \infty} \left(\fint_{E_j} |f(x) - f(a)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \,,$$

wobei $(E_j)_{j=1,2,\ldots}$ eine Folge von K-regulären Mengen ist, deren Durchmesser für $j \to \infty$ gegen null gehen und die alle den Punkt a enthalten.

1.1.2 Die Räume $W^{m,p}(\Omega)$

Definition 1.10 *Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dann nennt man $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ schwache oder verallgemeinerte partielle Ableitung von f, wenn*

$$\int_\Omega f(x) \partial^\alpha \phi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x) \phi(x) \, dx$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Bemerkung. Analog zu dieser Definition erklärt man den schwachen Gradienten und die verallgemeinerte Jacobi-Matrix.

Die Sobolevräume $W^{m,p}(\Omega)$ werden damit wie folgt definiert, vergleiche [Ma].

Definition 1.11 *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Mit $L^{k,p}(\Omega)$ sei der Raum aller $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ bezeichnet, deren schwache Ableitungen $\partial^\alpha f$ für $|\alpha| = k$ in $L^p(\Omega)$ liegen. Der Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$ wird durch die Definition*

$$W^{m,p}(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{m} L^{k,p}(\Omega)$$

zu einem Banachraum mit der Norm

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Bemerkung. Der Raum $W^{m,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ wird dementsprechend als der lineare Raum von Funktionen f erklärt, deren schwache Ableitungen $\partial^\alpha f$ für $|\alpha| \leq m$ zu $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ gehören.

Das sogenannte Sobolev-Lemma ist die Grundlage für den Sobolevschen Einbettungssatz, der für die Regularitätstheorie von zentraler Bedeutung ist, vergleiche [I2].

Lemma 1.12 *Sei B Kugel (oder Würfel) in $\mathbb{R}^n$ und $f \in W^{1,p}(B)$, $1 \leq p < n$. Dann ist $f \in L^{\frac{pn}{n-p}}(B)$ und*

$$\|f\|_{\frac{pn}{n-p},B} \;\leq\; \frac{pn}{n-p}\,\frac{n-1}{n}\,\|\nabla f\|_{p,B} + |B|^{-\frac{1}{n}}\,\|f\|_{p,B}\,. \tag{1.8}$$

Satz 1.13 (Sobolevscher Einbettungssatz)
Die Einbettungen

$$\begin{array}{lcll} W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{np}{n-p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,, & \textit{falls} \quad 1 \leq p < n\,, \quad \textit{und} \\ W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & L^{q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,, & \textit{falls} \quad p = n\,, \end{array}$$

sind für jedes $q \geq 1$ stetig.

Eine wichtige Rolle im Beweis der Regularitätsaussage für quasireguläre Abbildungen in Kapitel 9 spielen die Poincaré- und die sogenannte Poincaré-Sobolev-Ungleichung, letztere ergibt sich als Kombination von (1.9) und (1.8), vergleiche [BI] und [I2].

Lemma 1.14 (Poincaré-Ungleichung)
Sei $B = B(x,r)$ Kugel in $\mathbb{R}^n$ und $f \in W^{1,p}(B)$. Dann gilt

$$\|f - f_B\|_{p,B} \;\leq\; 2^{\frac{n}{p}+1}\, r\, \|\nabla f\|_{p,B} \tag{1.9}$$

für $p \geq 1$.

Lemma 1.15 (Poincaré-Sobolev-Ungleichung)
Für $f \in W^{1,p}(B)$, $1 \leq p < n$, gilt

$$\|f - f_B\|_{\frac{np}{n-p},B} \;\leq\; \left(\frac{np}{n-p} + 3^n\right) \|\nabla f\|_{p,B}\,. \tag{1.10}$$

1.2 Quasireguläre und quasikonforme Abbildungen

Um eine Vorstellung von quasiregulären beziehungsweise quasikonformen Abbildungen zu bekommen, soll kurz auf eine geometrische Definition in der komplexen Ebene, die den Ursprung der gesamten Theorie darstellt, eingegangen werden (vergleiche [LV] Abschnitt 1.3). Dazu sei $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4) \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Viereck, das heißt ein Jordangebiet mit vier ausgezeichneten Randpunkten z_1, z_2, z_3 und z_4 (siehe Abbildung 1). Aus dem Riemannschen Abbildungssatz folgt, daß Q auf ein gewöhnliches Rechteck konform abgebildet werden kann. Eine solche Abbildung wird kanonische Abbildung des Vierecks genannt. Alle

Rechtecke, die kanonische Bilder eines festen Vierecks Q sind, haben dasselbe Seitenverhältnis a/b. Die Zahl $M(Q) = a/b$ nennt man den konformen Modul von Q. Dieser Modul bleibt unter konformen Abbildungen unverändert, das heißt, er ist konform invariant.

Definition 1.16 *Sei G ein Gebiet und Q ein Viereck mit $\bar{Q} \subset G \subset \mathbb{C}$. Sei weiter f ein orientierungserhaltender Homöomorphismus und Q' das Bild von Q unter f. Dann wird das Verhältnis $M(Q')/M(Q)$ der Module von Q' und Q Dilatation des Vierecks Q unter f und die Zahl*

$$K(G) = \sup_{\bar{Q} \subset G} \frac{M(Q')}{M(Q)} \tag{1.11}$$

die maximale Dilatation von f in G genannt.

Definition 1.17 *Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus f des Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ heißt quasikonform, wenn seine maximale Dilatation $K(G)$ endlich ist. Gilt $K(G) \leq K < \infty$, wird f K-quasikonform genannt.*

Bemerkung. Man kann zeigen, daß eine 1-quasikonforme Abbildung einer konformen entspricht, vergleiche [LV] S.30.

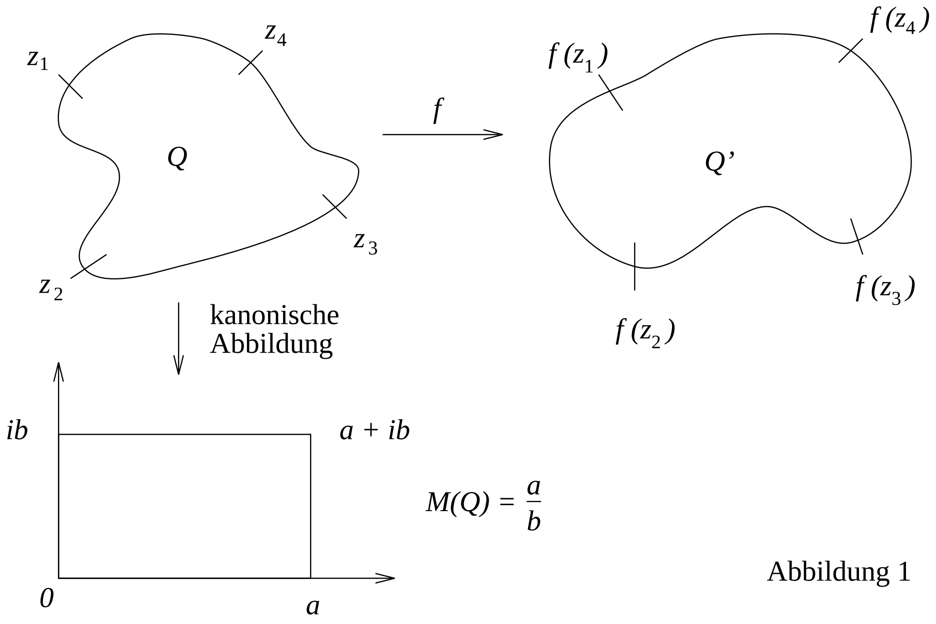

Abbildung 1

Um Quasikonformität in höherdimensionalen euklidischen Räumen zu definieren, werden unterschiedliche Ansätze gemacht, zum Beispiel über Module von Kurvenfamilien [Vu]. Die Grundidee bei diesen Definitionen ist der Versuch, analytische beziehungsweise konforme Abbildungen in geeigneter Art und Weise zu verallgemeinern.

Definition 1.18 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt konform, wenn*

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\max_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|}{\min_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|} \;=\; 1 \tag{1.12}$$

für alle $a \in \Omega$ beziehungsweise K-quasikonform, $1 \leq K < \infty$, wenn

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\max_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|}{\min_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|} \;\leq\; K \tag{1.13}$$

für alle $a \in \Omega$.

Diese ältere Definition der Quasikonformität in $\mathbb{R}^n$ bedeutet anschaulich, daß infinitesimal kleine $(n-1)$-dimensionale Sphären unter f höchstens um den Faktor K verzerrt werden. Eine zu dieser äquivalente und allen weiteren Abschnitten zugrundeliegende, ist die nachfolgende analytische Definition.

Definition 1.19 *Eine Abbildung $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ heißt K-quasiregulär, $1 \leq K < \infty$, wenn $J(x, f) \geq 0$ fast überall und die Abschätzung*

$$\max_{|\xi|=1} |Df(x)\xi| \;\leq\; K \min_{|\xi|=1} |Df(x)\xi| \tag{1.14}$$

für fast alle $x \in \Omega$ gilt. Ist f zusätzlich ein Homöomorphismus, nennt man f K-quasikonform. Die kleinste Zahl K, für die (1.14) *gilt, wird als die Dilatation von f bezeichnet.*

Definition 1.20 *Eine Abbildung $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < n$, mit $J(x, f) \geq 0$ fast überall, heißt schwach K-quasiregulär, wenn sie* (1.14) *erfüllt.*

Grundlegende Eigenschaften quasiregulärer Abbildungen werden zum Beispiel in [Ri1] Kapitel 6 ausführlich dargestellt. Dort sind auch die Beweise der nachstehenden Aussagen aufgeführt.

Lemma 1.21 *Eine quasireguläre Abbildung ist fast überall differenzierbar. Eine nichtkonstante quasireguläre Abbildung ist orientierungserhaltend, diskret und offen.*

Die Theorie der n-dimensionalen quasiregulären Abildungen für $n \geq 3$ unterscheidet sich wesentlich von der komplexen Funktionentheorie. Es gibt in höheren Dimensionen zum Beispiel kein Analogon zum Riemannschen Abbildungssatz und außer Möbiustransformationen (zur Definition in $\mathbb{R}^n$ vergleiche [Vu] Kapitel 1) gibt es keine weiteren konformen Abbildungen. Dies ist die Aussage einer Verallgemeinerung des Satzes von Liouville, siehe [Re2].

Satz 1.22 *Für $n \geq 3$ ist jede 1-quasireguläre Abbildung eine Einschränkung einer Möbius-Transformation oder eine Konstante.*

Die aus der Funktionentheorie bekannten Differentialgleichungen, wie die Cauchy-Riemann-Gleichungen und die Beltrami-Gleichung, lassen sich allerdings in geeigneter Form für höherdimensionale Räume verallgemeinern. Es ist ein Diffeomorphismus genau dann konform, wenn er

$$D^t f(x)\, Df(x) \;=\; J(x,f)^{\frac{2}{n}}\, \mathrm{Id}\,, \tag{1.15}$$

das n-dimensionale Cauchy-Riemann-System, erfüllt.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen quasiregulären Abbildungen und der Riemannschen Geometrie. Dazu sei $G : \Omega \to \mathrm{S}(n)$ eine matrixwertige Funktion, die der Bedingung

$$\lambda^{-1}\, |\xi| \;\leq\; \langle G(x)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \lambda\, |\xi| \tag{1.16}$$

mit einem reellem $\lambda \geq 1$ für alle $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ genügt. Das innere Produkt $\langle G(x)\, .\, ,\, .\, \rangle$ im Tangentialraum $T_x\Omega \cong \mathbb{R}^n$ induziert einen Riemannschen Metriktensor auf Ω. Die Norm eines Tangentialvektors $\xi \in T_x\Omega$ bezüglich dieser Metrik ist durch

$$|\xi|_G \;:=\; \langle G(x)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

definiert. Jede K-quasikonforme Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ erzeugt ihren eigenen Riemannschen Metriktensor

$$G(x) \;:=\; J(x,f)^{-\frac{2}{n}}\, D^t f(x)\, Df(x) \tag{1.17}$$

für $J(x,f) \neq 0$ beziehungsweise $G(x) = \mathrm{Id}$ sonst, bezüglich dem f konform ist. Man nennt $G(x)$ auch Matrixdilatation von f. Das folgende Lemma sichert die Gültigkeit von (1.16).

Lemma 1.23 *Sei $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < n$, schwach K-quasiregulär, dann gilt die Abschätzung*

$$K^{\frac{1}{n}-1}|\xi| \;\leq\; \langle G(x)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \;\leq\; K^{1-\frac{1}{n}}|\xi| \tag{1.18}$$

für alle $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

Zum Beweis siehe Lemma 4.2 für $l = 1$.

Quasireguläre Abbildungen kann man damit als schwache Lösungen des Gleichungssystems

$$D^t f(x)\, Df(x) \;=\; J(x,f)^{\frac{2}{n}}\, G(x) \tag{1.19}$$

auffassen. Gleichung (1.19) wird als das verallgemeinerte Beltrami-System bezeichnet. Aus ihm können Differentialgleichungen erster Ordnung wie die p-harmonischen Gleichungen (vergleiche Kapitel 3 und 4) abgeleitet werden.

2 Differentialformen und lineare Hodge-Theorie

2.1 Die Graßmann-Algebra

Die Graßmann-Algebra oder auch äußere Algebra wird meist über allgemeine Vektorräume V eingeführt (siehe [He], [Fla]). Hier wird direkt auf den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $e_1, e_2, ..., e_n$ zurückgegriffen. In [Po] sind alle fehlenden Beweise und auch weitere Details enthalten.

Für $l = 0, 1, ..., n$ bezeichnet $\Lambda^l = \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ den linearen Raum aller l-Vektoren (allgemein Multivektoren), aufgespannt durch die äußeren Produkte der Standardbasisvektoren

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_l} \tag{2.1}$$

über alle geordneten Systeme $I = (i_1, i_2, ..., i_l)$ mit $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_l \leq n$. Konventionell ist $\Lambda^0 = \Lambda^n = \mathbb{R}$ und $\Lambda^l = 0$ für $l > n$.

Das äußere Produkt von Elementen aus $\mathbb{R}^n$ ist assoziativ, distributiv und alternierend. Es ist zum Beispiel für $a, b \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ durch

$$a \wedge b = (\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) \wedge (\sum_{j=1}^{n} b_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \, e_i \wedge e_j \tag{2.2}$$

definiert, wobei $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ und $e_i \wedge e_i = 0$.

Für jedes l mit $1 \leq l \leq n$ gilt

$$\dim \Lambda^l = \dim \Lambda^{n-l} = \binom{n}{l} .$$

Die direkte Summe der Räume Λ^l, $0 \leq l \leq n$, bildet eine alternierende, assoziative Algebra, die sogenannte Graßmann-Algebra Λ,

$$\Lambda = \bigoplus_{0 \leq l \leq n} \Lambda^l .$$

Für $\alpha = \sum \alpha^I e_I \in \Lambda$ und $\beta = \sum \beta^I e_I \in \Lambda$ ist ein Skalarprodukt definiert:

$$\langle \, . \, , . \, \rangle : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \qquad \langle \alpha, \beta \rangle = \sum \alpha^I \beta^I, \tag{2.3}$$

wobei die Summation über alle Systeme $I = (i_1, ..., i_l)$ und alle $l = 0, 1, ..., n$ läuft.

Definition 2.1 *Der Hodge-Sternoperator* $\star : \Lambda \to \Lambda$ *ist ein linearer Operator, definiert durch*

$$\star \, 1 = e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n$$

und

$$\alpha \wedge \star\beta \;=\; \beta \wedge \star\alpha \;=\; \langle\, \alpha, \beta \,\rangle(\star 1) \tag{2.4}$$

für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ *.*

Aus der Definition folgt sofort

$$\star : \Lambda^l \to \Lambda^{n-l} \qquad \text{und} \qquad \star\star \;=\; (-1)^{l(n-l)}\mathrm{Id} : \Lambda^l \to \Lambda^l. \tag{2.5}$$

Damit hat man auch eine Norm für $\alpha \in \Lambda$ gegeben, mit der Beziehung

$$|\alpha|^2 \;=\; \langle\, \alpha, \alpha \,\rangle \;=\; \star(\alpha \wedge \star\alpha) \;\in \Lambda^0.$$

Definition 2.2 *Sei eine lineare Abbildung* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *gegeben. Mit den Vektoren* $a_1, ..., a_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ *ist für jedes* $k = 1, 2, ..., n$ *der lineare Operator* $A_\# : \Lambda^k \to \Lambda^k$ *definiert durch*

$$A_\#(a_1 \wedge ... \wedge a_k) \;:=\; Aa_1 \wedge ... \wedge Aa_k\ . \tag{2.6}$$

Der Operator $A_\#$ *wird als die* k*-te äußere Potenz von* A *bezeichnet.*

Folgerungen. Für $A, B \in \mathrm{GL}(n)$ gilt

(i) $(AB)_\# \;=\; A_\# B_\#$,

(ii) $(A^{-1})_\# \;=\; (A_\#)^{-1}$,

(iii) $(A^t)_\# \;=\; (A_\#)^t$,

(iv) $A_\#(\alpha_k \wedge \beta_l) \;=\; A_\#\alpha_k \wedge A_\#\beta_l$,

für $\alpha_k \in \Lambda^k$, $\beta_l \in \Lambda^l$.

Satz 2.3 *Sei* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine lineare Abbildung mit* $\det A \neq 0$*, dann besteht die Matrix der Abbildung* $A_\# : \Lambda^k \to \Lambda^k$ *aus den* k*-reihigen Unterdeterminanten von* A*.*

Die Volumenform $e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n$ wird auch einfach mit Vol bezeichnet. Die folgenden beiden Lemmata spielen in späteren Beweisen eine wichtige Rolle.

Lemma 2.4 *Für jede Matrix* $A \in \mathrm{GL}(n)$ *gilt*

$$A^t_\# \star A_\# = (\det A)\star \;:\; \Lambda^l \to \Lambda^{n-l}\ . \tag{2.7}$$

Beweis. Für $\alpha \in \Lambda^{n-l}$ und $\beta \in \Lambda^l$ beliebig gilt mit (2.4) und Satz 2.3

$$\begin{aligned} \langle \alpha, A_\#^t \star A_\# \beta \rangle \mathrm{Vol} &= \langle A_\# \alpha, \star A_\# \beta \rangle \mathrm{Vol} \\ &= A_\# \alpha \wedge \star \star A_\# \beta \\ &= A_\# \alpha \wedge A_\# \star \star \beta \\ &= A_\# (\alpha \wedge \star \star \beta) \\ &= A_\# \langle \alpha, \star \beta \rangle \mathrm{Vol} \\ &= (\det A) \langle \alpha, \star \beta \rangle \mathrm{Vol} \end{aligned}$$

und damit

$$(A_\#^t \star A_\#)\beta = (\det A) \star \beta \ .$$

$\square$

Lemma 2.5 *Sei $G \in \mathrm{S}(n)$ mit der Darstellung $G = AA^t |\det A|^{-\frac{2}{n}}$ für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n)$. Dann gilt*

$$G_\# \star A_\# = |\det A|^{\frac{2(l-n)}{n}} (\det A) A_\# \star \tag{2.8}$$

auf Λ^l.

Beweis. Sei $\alpha \in \Lambda^l$ beliebig, damit ist $A_\# \alpha \in \Lambda^l$ und $\star A_\# \alpha \in \Lambda^{n-l}$.
Es ist

$$|\det A|^{\frac{-2(l-n)}{n}} G_\# \star A_\# \alpha = (|\det A|^{\frac{2}{n}} G)_\# \star A_\# \alpha \ ,$$

da für $\alpha = a_1 \wedge ... \wedge a_l$ mit $a_1, ..., a_l \in \Lambda^1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\lambda G)_\# (a_1 \wedge ... \wedge a_l) = \lambda G a_1 \wedge ... \wedge \lambda G a_l = \lambda^l G_\# (a_1 \wedge ... \wedge a_l) \ .$$

Weiter gilt mit den Folgerungen aus Definition 2.2 und mit (2.7)

$$\begin{aligned} (|\det A|^{\frac{2}{n}} G)_\# \star A_\# \alpha &= (AA^t)_\# \star A_\# \alpha \\ &= A_\# A_\#^t \star A_\# \alpha \\ &= A_\# (\det A) \star \alpha \\ &= (\det A) A_\# \star \alpha \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

$\square$

Bemerkung. Ist $G \in \mathrm{S}(n)$ und hat die lineare Abbildung $A \in \mathrm{GL}(n)$ die Darstellung $AA^t = |\det A|^{\frac{2}{n}} G$, nennt man A auch G-konform.

2.2 Die lineare Dilatation

Jede lineare Abbildung $A \in \mathrm{GL}(n)$ bildet die n-dimensionale Einheitskugel auf einen n-dimensionalen, um den Ursprung zentrierten Ellipsoiden $E(A)$ ab. Seien $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n$ die Längen der Halbachsen von $E(A)$ und damit auch die positiven Wurzeln der Eigenwerte der Abbildung AA^t, dann gilt

$$\gamma_n = \max_{|h|=1} |Ah| =: \|A\| \tag{2.9}$$

$$\gamma_1 = \min_{|h|=1} |Ah| . \tag{2.10}$$

Mit $K := \gamma_n/\gamma_1$ wird die lineare Dilatation bezeichnet (siehe [Vä] Kapitel 2). Die positiven Wurzeln der Eigenwerte der Abbildung $A_\# A_\#^t : \Lambda^l \to \Lambda^l$ sind die Produkte $\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}...\gamma_{i_l}$ über alle geordneten Systeme $I = (i_1, ..., i_l)$ mit $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_l$ (vergleiche Definition 2.2 und Satz 2.3).

Lemma 2.6 *Sei $A \in \mathrm{GL}(n)$ und $G \in \mathrm{S}(n)$ mit der Darstellung $G = AA^t|\mathrm{detA}|^{-\frac{2}{n}}$. Dann gilt*

$$\|A\|^l |\alpha| \leq K^l |A_\# \alpha| \tag{2.11}$$

für alle $\alpha \in \Lambda^l$.

Beweis. Mit (2.9) und (2.10) gilt

$$\begin{aligned} \|A\|^l &= \gamma_n^l = K^l \gamma_1^l \\ &\leq K^l \gamma_1\gamma_2...\gamma_l = K^l \min_{|\alpha|=1} |A_\# \alpha| \\ &= K^l \min_{\alpha \neq 0} \frac{|A_\# \alpha|}{|\alpha|} \leq K^l \frac{|A_\# \alpha|}{|\alpha|} . \end{aligned}$$

□

2.3 Differentialformen

Die Menge der Tangentialvektoren in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ bilden den Tangentialraum T_x. Mit T_x^* sei der Dualraum von T_x bezeichnet. Sowohl T_x als auch T_x^* sind isomorph zu $\mathbb{R}^n$. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\{\frac{\partial}{\partial x_j} \mid j = 1, 2, ..., n\}$ eine Basis in T_x und $\{dx_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ die duale Basis in T_x^*. Mit A_x sei die äußere Algebra über T_x^* bezeichnet.

Definition 2.7 *Eine Differentialform k-ten Grades auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung α, die jedem Punkt $x \in \Omega$ ein Element k-ten Grades aus A_x zuordnet.*

Bemerkung. Differentialformen 1-ten Grades werden in der Literatur meist Pfaffsche Formen genannt.

Im Gebiet $\Omega \subset I\!R^n$ läßt sich damit jede Differentialform k-ten Grades α folgendermaßen darstellen (Koordinatendarstellung):

$$\alpha(x) \;=\; \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} \alpha_{i_1\ldots i_k}(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k} \;=\; \sum_I \alpha^I(x)dx_I \tag{2.12}$$

mit eindeutigen auf Ω definierten Funktionen α^I (Koordinaten). Liegen alle α^I mit $I=(i_1,i_2,\ldots,i_k)$, $0\le i_1\le\ldots\le i_k\le n$ und $k=0,1,\ldots,n$ in $L^p(\Omega,I\!R)$, sagt man, α liegt im Raum $L^p(\Omega,\Lambda^k)$. Ausgestattet mit der Norm

$$\|\alpha\|_{p,\Omega} \;=\; \left(\int_\Omega |\alpha(x)|^p dx\right)^{1/p} \;=\; \left(\int_\Omega \left(\sum_I |\alpha^I(x)|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p} \tag{2.13}$$

ist $L^p(\Omega,\Lambda^k)$ ein Banachraum. Analog führt man die Räume $C^\infty(\Omega,\Lambda^k)$ und $C_0^\infty(\Omega,\Lambda^k)$ ein. Liegen alle α^I im Raum der Schwarz-Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega,I\!R)$, liegt α in $\mathcal{D}'(\Omega,\Lambda^k)$, dem Raum der linearen stetigen Funktionale auf $C_0^\infty(\Omega,\Lambda^k)$ (vergleiche [Ri2]).

Der Definition der Graßmann-Algebra folgend, definiert man

$$\mathcal{D}'(\Omega,\Lambda) \;=\; \bigoplus_{0\le l\le n} \mathcal{D}'(\Omega,\Lambda^l)$$

als den Raum aller Differentialformen, deren Koeffizienten Distributionen sind. Die Räume $C_0^\infty(\Omega,\Lambda)$ und $L_1^p(\Omega,\Lambda)$, $1\le p\le\infty$, sind Unterräume von $\mathcal{D}'(\Omega,\Lambda)$. Der Raum $L_1^p(\Omega,\Lambda)$ besteht aus allen Differentialformen α, mit

$$\|\alpha\|_{L_1^p(\Omega)} \;=\; \left(\int_\Omega \left(\sum_I\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial\alpha^I(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p} \;<\; \infty. \tag{2.14}$$

Hierbei handelt es sich lediglich um eine Halbnorm.

Der Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega,\Lambda^l)$, $1\le p<\infty$, ist definiert durch

$$W^{1,p}(\Omega,\Lambda^l) \;=\; L^p(\Omega,\Lambda^l)\,\cap\,L_1^p(\Omega,\Lambda^l)\,,$$

mit der Norm

$$\|\alpha\|_{W^{1,p}(\Omega)} \;=\; \|\alpha\|_p + \|\alpha\|_{L_1^p(\Omega)} \quad \text{für} \quad \alpha\in W^{1,p}(\Omega,\Lambda^l)\,.$$

Für $\alpha\in L^p(\Omega,\Lambda)$ und $\beta\in L^q(\Omega,\Lambda)$ mit $1\le p,q\le\infty$, $1/p+1/q=1$, ist ein Skalarprodukt $(\,.\,,.\,): L^p(\Omega,\Lambda)\times L^q(\Omega,\Lambda)\to I\!R$ definiert, mit

$$(\alpha,\beta) \;=\; \int_\Omega \langle\,\alpha(x),\beta(x)\,\rangle dx\,. \tag{2.15}$$

Definition 2.8 *Der äußere Ableitungsoperator*

$$d: \quad \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^l) \to \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^{l+1})$$

mit $l = 0, 1, ..., n$, *ist folgendermaßen definiert :*
Für $l = 0$ *und damit* $\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *durch*

$$d\alpha \;=\; \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} dx_n \;,$$

das heißt, $d\alpha$ *entspricht dem (totalen) Differential (mit Ableitungen im Distributionensinne).*
Für $l \geq 1$ *und* $\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^l)$, *durch*

$$d\alpha \;=\; \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_l \leq n} d\alpha_{i_1 ... i_l}\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_l} \;=\; \sum_I d\alpha^I dx_I \;. \tag{2.16}$$

Folgerungen. Für den so definierten äußeren Ableitungsoperator gilt mit $\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^l)$ und $\beta \in \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^k)$

(i) $\quad d(\alpha + \beta) \;=\; d\alpha + d\beta \;,$

(ii) $\quad d(\alpha \wedge \beta) \;=\; d\alpha \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta \;,$

(iii) $\quad d(d\alpha) \;=\; d(d\beta) \;=\; 0 \;.$

Definition 2.9 *Der formal konjugierte Operator zu* d, *der Hodge-Koableitungsoperator*

$$d^*: \quad \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^{l+1}) \to \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^l)$$

ist für $(l+1)$*-Formen definiert durch*

$$d^* \;=\; (-1)^{nl+1} \star d \star \tag{2.17}$$

oder äquivalent für l*-Formen durch*

$$(-1)^{l+1} d^* \star \;=\; \star d \;. \tag{2.18}$$

Bemerkung. Für $\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^l)$ hat $d^*\alpha$ die Darstellung

$$d^*\alpha \;=\; \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_l \leq n} \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu-1} \frac{\partial \alpha_{i_1 ... i_l}}{\partial x_{i_\nu}}\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge ... \wedge dx_{i_l} \;. \tag{2.19}$$

Die Schreibweise $\widehat{dx_{i_\nu}}$ bedeutet, daß dieses Differential in der Summation jeweils ausgelassen wird (siehe [HR] S.174).

Lemma 2.10 *Ist $\alpha \in C^\infty(\Omega, \Lambda^l)$ und $\beta \in C^\infty(\Omega, \Lambda^{l+1})$ und hat weiter entweder α oder β einen kompakten Träger in Ω, so gilt*

$$(d\alpha, \beta) \;=\; (\alpha, d^*\beta) \;. \tag{2.20}$$

Beweis. Sei $V \subset \Omega$, so daß $\operatorname{supp}\alpha \cap \operatorname{supp}\beta \subset V$ und sei weiter ∂V glatt. Mit dem Satz von Stokes für Differentialformen und mit Folgerung (ii) aus Definition 2.8 gilt

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \int_{\partial V} \alpha \wedge \star\beta \;&=\; \int_V d(\alpha \wedge \star\beta) \\ &=\; \int_V d\alpha \wedge \star\beta + (-1)^l \int_V \alpha \wedge d \star \beta \;. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit den Eigenschaften des Hodge-Sternoperators (2.4) und (2.5) und mit (2.17)

$$\begin{aligned} (d\alpha, \beta) \;&=\; \int_\Omega d\alpha \wedge \star\beta \;=\; (-1)^{l+1} \int_\Omega \alpha \wedge d \star \beta \\ &=\; (-1)^{l+1} \int_\Omega \alpha \wedge (-1)^{(n-l)(n-(n-l))} \star\star\, d \star \beta \\ &=\; (-1)^{l(1-l)} \int_\Omega \alpha \wedge \star (-1)^{nl+1} \star d \star \beta \\ &=\; \int_\Omega \alpha \wedge \star\, d^*\beta \;=\; (\alpha, d^*\beta) \;. \end{aligned}$$

□

Definition 2.11 *Eine Differentialform α heißt geschlossen, falls $d\alpha = 0$; beziehungsweise kogeschlossen, falls $d^*\alpha = 0$.*
Eine Differentialform α heißt exakt, wenn eine Differentialform β existiert mit $d\beta = \alpha$; beziehungsweise koexakt, wenn ein β existiert mit $d^*\beta = \alpha$.

Definition 2.12 *Der Laplace-Beltrami-Operator für Differentialformen $\Delta :\ \Lambda^k(\Omega) \to \Lambda^k(\Omega)$ ist definiert durch*

$$\Delta := dd^* \;+\; d^*d \;. \tag{2.21}$$

Lemma 2.13 *Für jede Differentialform $\alpha = \sum_I \alpha^I dx_I$ gilt*

$$\Delta\alpha \;=\; \sum_I \Delta\alpha^I dx_I \;, \tag{2.22}$$

wobei $\Delta\alpha^I$ mit der üblichen Definition des Laplace-Operators (angewandt auf Funktionen) zusammenfällt.

(Beweis siehe [Fla] S.140/41.)

Definition 2.14 *Sei $\Omega \subset I\!R$ ein Gebiet und $f : \Omega \to I\!R^n$, $f = (f_1, ..., f_n)$, eine Abbildung aus dem Raum $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \geq 1$. Mit $\alpha \in C^\infty(I\!R^n, \Lambda^l)$ induziert f einen Homomorphismus*

$$f^* : \quad C^\infty(I\!R^n, \Lambda^l) \; \to \; L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Lambda^l) \; ,$$

der durch

$$(f^*\alpha)(x) \;=\; \sum_I \alpha^I(f(x))\, df_{i_1} \wedge ... \wedge df_{i_l} \tag{2.23}$$

$$\;=\; \sum_I \alpha^I(f(x))\, df_I \tag{2.24}$$

definiert ist. Die Abbildung f^* wird als Zurückholung bezeichnet (interpretierbar als Variablenwechsel bei Differentialformen, siehe [Fla] S.25/26).

Lemma 2.15 *Sind alle Koeffizienten α^I von $\alpha \in C^\infty(I\!R^n, \Lambda^l)$ konstant, entspricht der Operator f^* auf l-Formen der l-ten äußeren Potenz der linearen Transformation $D^t f(x)$. Das heißt*

$$(f^*\alpha)(x) \;=\; (D^t f(x))_\# \alpha \; . \tag{2.25}$$

2.4 Der Zerlegungssatz von Hodge

Von zentraler Bedeutung für die gesamte Theorie der Differentialformen ist der Zerlegungssatz von Hodge, siehe dazu auch [IM1] und [Ri2].

Satz 2.16 *(Hodge-Zerlegungssatz) Zu jeder Differentialform $\omega \in L^p(I\!R^n, \Lambda^k)$, $1 < p < \infty$, existieren Differentialformen*

$$\alpha \in \mathrm{Ker}\, d^* \cap L^p_1(I\!R^n, \Lambda^{k-1}) \quad \textit{und} \quad \beta \in \mathrm{Ker}\, d \cap L^p_1(I\!R^n, \Lambda^{k+1}) \; ,$$

so daß gilt

$$\omega \;=\; d\alpha \;+\; d^*\beta \; . \tag{2.26}$$

Die Differentialformen $d\alpha$ und $d^*\beta$ sind eindeutig und genügen der gleichmäßigen Abschätzung

$$\|\alpha\|_{L^p_1(I\!R^n)} \;+\; \|\beta\|_{L^p_1(I\!R^n)} \;\leq\; C_p(n)\|\omega\|_p \tag{2.27}$$

mit einer Konstanten $C_p(n)$, unabhängig von ω.

Beweis.
(i) Eindeutigkeit: Angenommen, es existieren zwei Zerlegungen

$$\omega \;=\; d\alpha + d^*\beta \;=\; d\alpha' + d^*\beta'$$

mit $d\alpha, d^*\beta, d\alpha', d^*\beta' \in L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$, dann ist

$$d(\alpha - \alpha') + d^*(\beta - \beta') \;=\; 0 \;.$$

Durch Differentiation folgt

$$d^*d(\alpha - \alpha') \;=\; dd^*(\beta - \beta') \;=\; 0$$

und

$$dd^*d(\alpha - \alpha') \;=\; d^*dd^*(\beta - \beta') \;=\; 0$$

beziehungsweise

$$d^*dd(\alpha - \alpha') \;=\; dd^*d^*(\beta - \beta') \;=\; 0 \;.$$

Mit der Definition des Laplace-Beltrami-Operators (2.21) gilt

$$\Delta d(\alpha - \alpha') \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \Delta d^*(\beta - \beta') \;=\; 0$$

für $d(\alpha - \alpha')$, $d^*(\beta - \beta') \in L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$.

Aus dem Lemma von Weyl (siehe Anhang) folgt, daß $d(\alpha-\alpha')$ und $d^*(\beta-\beta')$ harmonisch im üblichen Sinne sind. Die Koeffizientenfunktionen sind beschränkt, da sie in $L^p(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ liegen. Eine Folgerung des Satzes von Liouville besagt, daß eine Funktion, die in der ganzen komplexen Ebene sowohl harmonisch wie beschränkt ist, gleich einer Konstanten ist. Die einzige L^p-integrierbare Konstante ist die 0. Daraus folgt

$$d\alpha \;=\; d\alpha' \quad \text{und} \quad d^*\beta \;=\; d^*\beta'$$

und damit die Eindeutigkeit.

(ii) Existenz: Es wird der Fall $n \geq 3$ betrachtet.

Zunächst sei $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$ eine Differentialform mit der Darstellung $\omega = \sum_I \omega^I dx_I$. Es wird eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi \quad = \quad \omega \tag{2.28}$$

gesucht. Aus (2.22) folgt

$$\Delta\varphi \;=\; \sum_I \Delta\varphi^I dx_I \;=\; \omega \quad \text{oder} \quad \Delta\varphi^I \;=\; \omega^I$$

für alle I.

Für ein festes I sei $v = \omega^I$ und $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion. Dann folgt mit der Parseval-Gleichung (11.4), der Fourier-Transformierten von $\Delta\psi(x)$ (11.5) und einer Darstellung des Riesz-Potentials für $\eta = 2$ (11.12)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\psi(x)dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)\hat{\psi}(x)dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)\frac{1}{(2\pi|x|)^2}(\Delta\psi)\hat{}\,(x)dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} I_2(v)(x)\Delta\psi(x)dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Delta I_2(v)(x)\psi(x)dx\,.\end{aligned}$$

Damit ist $\Delta I_2(v) = v$ im Distributionensinne. Da $I_2(v) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, folgt $\Delta I_2(v) = v$ im üblichen Sinne. Das heißt, mit $\Delta\varphi^I = \Delta I_2(v)$ ist eine Lösung $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$ für (2.28) gefunden.

Mit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, nochmaliger Anwendung von (11.4), (11.5) und (11.12) und mit dem Fourier-Multiplikator der Riesz-Transformation (11.9) gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} I_2(v)(x)D_{jk}\psi(x)dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)\frac{1}{(2\pi|x|)^2}(D_{jk}\psi)\hat{}\,(x)dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)\frac{1}{(2\pi|x|)^2}(-4\pi^2 x_j x_k\hat{\psi}(x))dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} (i\frac{x_j}{|x|})(i\frac{x_k}{|x|})\hat{v}(x)\hat{\psi}(x)dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} (R_jR_kv)\hat{}\,(x)\hat{\psi}(x)dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} (R_jR_kv)(x)\psi(x)dx\end{aligned}$$

und damit

$$D_{jk}I_2(v) \;=\; R_jR_kv \;=\; R_jR_k\Delta I_2(v)\,. \tag{2.29}$$

Da es sich bei R_j um einen beschränkten Operator in L^p, mit der L^p-Norm A_p, handelt, folgt mit (11.10) und (2.29)

$$\|D_{jk}I_2(v)\|_p \;\le\; A_p^2\,\|v\|_p \tag{2.30}$$

und damit auch

$$\|D_{jk}\varphi\|_p \;\le\; C_p(n)\,\|\omega\|_p\,, \tag{2.31}$$

wobei $D_{jk}\varphi = \sum_I D_{jk}\varphi^I dx_I$ bedeutet.

Da $\omega = (dd^* + d^*d)\varphi = d\alpha + d^*\beta$, entspricht $\alpha = d^*\varphi$ und $\beta = d\varphi$. Also hat die Differentialform β die Darstellung

$$\beta \;=\; \sum_I \beta^I dx_I \;=\; d\varphi \;=\; \sum_I\sum_j \frac{\partial\varphi^I}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_I\,. \tag{2.32}$$

Das ergibt mit (2.30), der L^p-Norm (2.13) und der L_1^p-Norm (2.14) für Differentialformen

$$\begin{aligned}
\|\beta\|_{L_1^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial\beta(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_I\sum_i\sum_j\left|\frac{\partial^2\varphi^I(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p} \\
&\leq C_1(p,n)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_I\sum_i\sum_j|\omega^I(x)|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p} \\
&= C_1(p,n)\sum_i\sum_j\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_I|\omega^I(x)|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p} \\
&\leq C_1(p,n)\, n^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\omega(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&= C_1(p,n)\, n^2\, \|\omega\|_p\,.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich $\|\alpha\|_{L_1^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_2(p,n)\,\|\omega\|_p$. Damit gilt für $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\Lambda^k)$

$$\|\alpha\|_{L_1^p(\mathbb{R}^n)} + \|\beta\|_{L_1^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_3(p,n)\,\|\omega\|_p\,,$$

mit $C_3(p,n) = C_1(p,n)\,n^2 + C_2(p,n)$.

Sei nun $\omega \in L^p(\mathbb{R}^n,\Lambda^k)$, $1 < p < \infty$, und $\omega_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\Lambda^k)$ eine Folge von Differentialformen, mit $\omega_i \to \omega$ in L^p (C_0^∞ liegt dicht in L^p) und der Darstellung $\omega_i = \sum_I \omega_i^I dx_I$. Für ein festes I sei wieder $v = \omega^I$, $v_i = \omega_i^I$ und $u_i = I_2(v_i)$. Weiter sei $B_r = B(0,r)$ die n-dimensionale Kugel um den Ursprung mit dem Radius r. Dann gilt mit der Poincaré-Ungleichung (1.9) und mit (2.30)

$$\begin{aligned}
\|D_ju_i - (D_ju_i)_{B_r} &- (D_ju_m - (D_ju_m)_{B_r})\|_{p,B_r} \\
&= \|D_ju_i - D_ju_m - (D_ju_i - D_ju_m)_{B_r}\|_{p,B_r} \\
&\leq C(n,r)\,\|\nabla D_ju_i - \nabla D_ju_m\|_{p,B_r} \\
&\leq C'(n,r)\,\|v_i - v_m\|_p \quad < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

für alle $i, m > N(\varepsilon)$, wobei

$$(D_ju_i)_{B_r} = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} D_ju_i\,.$$

Damit ist $g_{ir} := D_ju_i - (D_ju_i)_{B_r}$ eine Cauchy-Folge in $W^{1,p}(B_r)$, das heißt, der Grenzwert $\lim_{i\to\infty} g_{ir} = g_r$ existiert in $W^{1,p}(B_r)$ (Banachraum).

Da $g_{ir} - g_{i\,(r+1)}$ konstant ist, ist auch $g_r - g_{r+1}$ konstant in B_r. Es wird eine neue Folge $\tilde{g}_r$ in B_r konstruiert, mit

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1 &= g_1 \\
\tilde{g}_r &= g_r + (g_1 - g_r|_{B_1}) \quad , \quad \text{wobei} \quad (g_1 - g_r|_{B_1}) = c \ \text{ mit } \ c \in \mathbb{R} \, .
\end{aligned}$$

Außerdem sei $\tilde{g} \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{g}|_{B_r} = \tilde{g}_r$. Es soll gezeigt werden, daß $\tilde{g} \in L^p_1(\mathbb{R}^n)$. Da $\tilde{g} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $R_k R_j v \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ist mit $D_k D_j u_i = R_k R_j v_i$ (2.29) auch

$$D_k \tilde{g} = \lim_{i \to \infty} D_k D_j u_i = \lim_{i \to \infty} R_k R_j v_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

also

$$D_k \tilde{g} = R_k R_j v$$

und damit $\tilde{g} \in L^p_1(\mathbb{R}^n)$. Da $\beta = d\varphi$ und $\tilde{g}$ mit $D_j \varphi^I$ im Distributionensinne übereinstimmt, folgt mit (2.32)

$$\beta \;=\; d\varphi \;=\; \sum_I \sum_j D_j \varphi^I dx_j \wedge dx_I \;\in\; L^p_1(\mathbb{R}^n, \Lambda^{k+1})$$

und $d\beta = 0$. Auf die gleiche Art und Weise erhält man

$$\alpha \;\in\; L^p_1(\mathbb{R}^n, \Lambda^{k-1}) \quad \text{und} \quad d^*\alpha \;=\; 0 \, .$$

Die Abschätzung (2.27) ergibt sich mit (2.30) wie oben bereits dargestellt.

$\square$

Im Zusammenhang mit dem Zerlegungssatz von Hodge ist es passend, zwei lineare Operatoren zu definieren, die sogenannten Hodge-Operatoren.

Definition 2.17 *Für $\omega \in L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda)$, $1 < p < \infty$, seien die beiden Operatoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ definiert durch*

$$\mathcal{A}\omega \;=\; d^*\beta \quad \text{und} \quad \mathcal{B}\omega \;=\; d\alpha \, , \tag{2.33}$$

wobei die Differentialformen α und β festgelegt sind durch den Hodge-Zerlegungssatz (Satz 2.16).

Die Hodge-Operatoren haben die im nachfolgenden Lemma aufgezählten Eigenschaften.

Lemma 2.18 *Die Hodge-Operatoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind beschränkte Operatoren in $L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda)$, $1 < p < \infty$. Es gelten die Beziehungen*

(i) $\quad \mathcal{A} + \mathcal{B} = \text{Id}$,

(ii) $\mathcal{A}d \; = \; \mathcal{B}d^* \; = \; 0 \; .$

Beweis.

Da $\|d^*\beta\|_p \leq C_p(n) \; \|\omega\|_p - \|d\alpha\|_p$, folgt sofort $\|\mathcal{A}\omega\|_p \leq C_p(n) \; \|\omega\|_p$ und damit die Beschränktheit von $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ genauso).
(i) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\omega = \mathcal{A}\omega + \mathcal{B}\omega = d\alpha + d^*\beta = \omega$.
(ii) Es gilt: $\mathcal{A}\omega = 0$, genau dann, wenn $\omega = d\alpha$ beziehungsweise wenn ω eine geschlossene Differentialform ist. Genauso besteht Ker $\mathcal{B}$ aus allen kogeschlossenen Differentialformen (siehe Definition 2.11). Damit ist $\mathcal{A}d = \mathcal{B}d^* = 0$.

□

Bemerkungen.

(i) Eine Differentialform wird harmonisches Feld genannt, falls $d\omega = d^*\omega = 0$.
(ii) Für den Beweis von Theorem 1 ist es wichtig zu bemerken, daß $\mathcal{A}\omega$ und $\mathcal{B}\omega$ harmonische Felder außerhalb des Trägers von ω sind.

Nach dem Zerlegungssatz von Hodge ist $d\alpha = -d^*\beta$ außerhalb des Trägers von ω und damit

$$d\mathcal{A}\omega = dd\alpha = 0 \quad \text{und} \quad d^*\mathcal{A}\omega = d^*d\alpha = -d^*d^*\beta = 0 \; . \tag{2.34}$$

Genauso ergibt sich

$$d\mathcal{B}\omega = d^*\mathcal{B}\omega = 0 \; . \tag{2.35}$$

(iii) In [IM3] werden Abschätzungen der L^p-Normen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bewiesen. So gilt zum Beispiel

$$\|\mathcal{A}\|_p \; = \; \|\mathcal{B}\|_p \; \leq \; \frac{1}{2}(n+2)A_p \; ,$$

wobei A_p die L^p-Norm der komplexen Hilbert-Transformation bezeichnet.

Lemma 2.19 *Sei $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$ eine geschlossene und $h \in L^q(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$ eine kogeschlossene Differentialform, $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Dann existieren Differentialformen $\alpha \in L_1^p(\mathbb{R}^n, \Lambda^{k-1})$ und $\beta \in L_1^q(\mathbb{R}^n, \Lambda^{k+1})$, so daß*

(i) $\quad g \; = \; d\alpha \quad \text{und} \quad d^*\alpha \; = \; 0 \; ,$

(ii) $\quad h \; = \; d^*\beta \quad \text{und} \quad d\beta \; = \; 0 \; ,$

(iii)

$$(g, h) \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} \langle \, g(x), h(x) \, \rangle \, dx \; = \; 0 \; . \tag{2.36}$$

Beweis.

(i) Die Existenz von α und β folgt aus dem Zerlegungssatz von Hodge. Sei $g = d\alpha + d^*\gamma$ mit $\alpha, \gamma \in L_1^p(\mathbb{R}^n, \Lambda)$, dann ist, da g geschlossen, $dg = dd\alpha = dd^*\gamma = 0$.

Damit ist $d^*\gamma \in L^p(I\!R^n,\Lambda)$ ein harmonisches Feld, insbesondere harmonisch, mit dem Lemma von Weyl (siehe Anhang) auch im üblichen Sinne. Der Argumentation im Beweis der Eindeutigkeit des Hodge-Zerlegungssatzes folgend, erweist sich $d^*\gamma$ als identisch 0. Also ist $g = d\alpha$ und $d^*\alpha = 0$.
(ii) Genauso ergibt sich $h = d^*\beta$ für ein $\beta \in L_1^q(I\!R^n,\Lambda)$ mit $d\beta = 0$.
(iii) Es bleibt zu zeigen, daß $(d\alpha, d^*\beta) = 0$ ist. Da $L_1^p(I\!R^n) \cap C^\infty(I\!R^n)$ dicht in $L_1^p(I\!R^n)$ und $L_1^q(I\!R^n) \cap C^\infty(I\!R^n)$ dicht in $L_1^q(I\!R^n)$ liegt, seien $\alpha, \beta \in C^\infty(I\!R^n,\Lambda)$ angenommen. Weiter sei $\varphi \in C_0^\infty(I\!R^n)$ eine Testfunktion. Mit den Folgerungen aus Definition 2.8 und der Definition des Hodge-Sternoperators (2.4) gilt

$$\varphi\langle\, d\alpha, d^*\beta\,\rangle \;=\; \varphi(d\alpha \wedge \star d^*\beta) \tag{2.37}$$

und

$$d(\varphi\alpha \wedge \star d^*\beta) \;=\; (d\varphi \wedge \alpha + \varphi d\alpha) \wedge d \star \beta\;. \tag{2.38}$$

Aus der Definition des Hodge-Koableitungsoperators (2.17) ergibt sich

$$\star\, d^*\beta \;=\; (-1)^{1-k^2} d \star \beta\;. \tag{2.39}$$

Nimmt man (2.37), (2.38) und (2.39) zusammen, folgt

$$\varphi\langle\, d\alpha, d^*\beta\,\rangle \;=\; (-1)^{1-k^2}\big(d(\varphi\alpha \wedge d\star\beta) - d\varphi \wedge \alpha \wedge d\star\beta\big)\;.$$

Durch Integration über ein Gebiet Ω, das den Träger von φ echt enthält und mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\left|\int_\Omega \varphi\langle\, d\alpha, d^*\beta\,\rangle dx\right| \;\leq\; \left|\int_\Omega d(\varphi\alpha \wedge d\star\beta)dx\right| \;+\; \left|\int_\Omega (d\varphi \wedge \alpha \wedge d\star\beta)dx\right|\;.$$

Wendet man den Satz von Stokes (für Differentialformen) auf den ersten Summanden der rechten Seite an, erhält man

$$\int_\Omega d(\varphi\alpha \wedge d\star\beta)dx \;=\; \int_{\partial\Omega} (\varphi\alpha \wedge d\star\beta)dx \;=\; 0\;. \tag{2.40}$$

Sei nun $r > 0$, $\varphi \in C_0^\infty(B(2r))$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_{B(r)} = 1$ und

$$|\nabla\varphi| \quad\leq\quad \frac{2}{r}\;. \tag{2.41}$$

Zu dieser speziellen Wahl der Testfunktion φ vergleiche zum Beispiel [Da] S.164. Mit (2.40), (2.41) und der Hölder-Ungleichung folgt

$$\left|\int_{I\!R^n} \varphi\langle\, d\alpha, d^*\beta\,\rangle dx\right| \;\leq\; \int_{I\!R^n} |d\varphi \wedge \alpha \wedge d\star\beta| dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |d\varphi|\,|\alpha|\,|d\star\beta|dx \\
&= \int\limits_{B(2r)\setminus B(r)} |\nabla\varphi|\,|\alpha|\,|d\star\beta|dx \\
&\leq \frac{2}{r}\left(\int\limits_{B(2r)\setminus B(r)} |\alpha|^p dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_{B(2r)\setminus B(r)} |d\star\beta|^q dx\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{2}{r}\,\|\alpha\|_{L^p(B(2r)\setminus B(r))}\,\|d\beta\|_{L^q(B(2r)\setminus B(r))} \\
&\leq \frac{2}{r}\,\|\alpha\|_{L^p(B(2r))}\,\|\beta\|_{L^q_1(B(2r)\setminus B(r))}\,. \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

Sei α_0 ein konstanter Multivektor aus Λ^{k-1}. In der obigen Gleichung (2.42) kann α durch $\alpha-\alpha_0$ ersetzt werden, denn es gilt $d(\alpha-\alpha_0)=d\alpha$. Seien weiter die Koordinaten α_0^I die L^1-Mittelwerte der Koordinatenfunktionen α^I über $B(2r)$. Dann kann auf (2.42) die Poincaré-Ungleichung (1.9) angewandt werden und es folgt

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\langle\, d\alpha, d^*\beta\,\rangle dx\right| \;\leq\; C(n,p)\,\|\alpha\|_{L^p_1(\mathbb{R}^n)}\,\|\beta\|_{L^q_1(B(2r)\setminus B(r))}\,.
$$

Es gilt

$$
\|\beta\|_{L^q_1(B(r))} + \|\beta\|_{L^q_1(B(2r)\setminus B(r))} = \|\beta\|_{L^q_1(B(2r))}
$$

und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue (siehe zum Beispiel [Mun])

$$
\lim_{r\to\infty}\|\beta\|_{L^q_1(B(2r))} = \lim_{r\to\infty}\|\beta\|_{L^q_1(B(r))} = \|\beta\|_{L^q_1(\mathbb{R}^n)}\,.
$$

Daraus folgt

$$
\lim_{r\to\infty}\|\beta\|_{L^q_1(B(2r)\setminus B(r))} = 0\,.
$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\langle\, d\alpha, d^*\beta\,\rangle dx\right| \to 0 \quad \text{für} \quad r\to\infty
$$

und damit die Behauptung.

$\square$

Der Beurling-Ahlfors-Operator $\mathcal{S}$ ist für die Theorie der quasiregulären Abbildungen enorm wichtig, allerdings nur in geraden Dimensionen (siehe [IM1]).

Definition 2.20 *Der Operator $\mathcal{S} : L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda) \to L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda)$ ist definiert durch*

$$\mathcal{S}\omega \quad = \quad d\alpha \; - \; d^*\beta \tag{2.43}$$

für $\omega = d\alpha + d^*\beta \in L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda)$.

Mit der gleichmäßigen Abschätzung aus dem Zerlegungssatz von Hodge (2.27) ist auch $\mathcal{S}$ ein beschränkter Operator

$$\|\mathcal{S}\omega\|_p \;\leq\; C_p(n)\; \|\omega\|_p \,,$$

mit der L^p-Norm $\|\mathcal{S}\|_p \leq (n+1)A_p$, wobei A_p wieder die L^p-Norm der komplexen Hilbert-Transformation bezeichnet (siehe [IM2]). Formal läßt sich $\mathcal{S}$ schreiben als

$$\mathcal{S} \quad = \quad (dd^* \; - \; d^*d)\; \Delta^{-1} \,. \tag{2.44}$$

Da sich Δ^{-1} durch Riesz-Potentiale (11.11) ausdrücken läßt, ist $\mathcal{S}$ ein singulärer Integraloperator. Für jedes p, $1 < p < \infty$, hat der Operator $\mathcal{S} : L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda) \to L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda)$ die Integraldarstellung (siehe [IM1] S.59)

$$(\mathcal{S}\omega)(x) \;=\; \left(1 - \frac{2l}{n}\right)\omega(x) \;-\; \frac{\Gamma(1+n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}\omega(y)dy \,, \tag{2.45}$$

wobei die matrixwertige Funktion $\Omega(\xi) \;:\; \Lambda^l \to \Lambda^l$ definiert ist durch

$$\Omega(\xi) \;=\; m(\xi) \;+\; \left(\frac{2l}{n} - 1\right) \mathrm{Id}$$

und $m(\xi)$ den Fourier-Multiplikator von $\mathcal{S}$ bezeichnet. Die Hodge-Operatoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ können durch den Beurling-Ahlfors-Operator ausgedrückt werden

$$\mathcal{A} \;=\; \frac{1}{2}\,(Id \;-\; \mathcal{S}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \;=\; \frac{1}{2}\,(Id \;+\; \mathcal{S}) \,.$$

Für eine exakte Differentialform ω ist $\mathcal{S}\omega = \omega$, für eine koexakte ist $\mathcal{S}\omega = -\omega$.

3 p-harmonische Tensoren

3.1 Harmonische Tensoren

Definition 3.1 *Die Lösungen $\alpha, \beta \in \mathcal{D}'(\Omega, \Lambda)$ des homogenen Hodge-Systems*

$$d^*d\alpha = 0 \quad , \quad d^*\alpha = 0 \tag{3.1}$$

oder des dualen Systems

$$dd^*\beta = 0 \quad , \quad d\beta = 0 \tag{3.2}$$

nennt man harmonische Tensoren.

Aus der Definition folgt, daß ein harmonischer Tensor ω eine harmonische Differentialform ist, das heißt $\Delta\omega = 0$.

Man betrachte das inhomogene Hodge-System

$$\begin{aligned} d^*du &= d^*\omega \quad , \quad d^*u = 0 \quad , \quad u \in L_1^2(I\!R^n, \Lambda^{k-1})\,, \\ dd^*v &= d\omega \quad , \quad dv = 0 \quad , \quad v \in L_1^2(I\!R^n, \Lambda^{k+1})\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

für gegebenes $\omega \in L^2(I\!R^n, \Lambda^k)$. Nach Lemma 2.10 ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} (du, d\phi) &= (d^*\omega, \phi) = (\omega, d\phi) \quad , \quad \phi \in C_0^\infty(I\!R^n, \Lambda^{k-1})\,, \\ (d^*v, d^*\psi) &= (d\omega, \psi) = (\omega, d^*\psi) \quad , \quad \psi \in C_0^\infty(I\!R^n, \Lambda^{k+1})\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Das heißt, (3.3) ist im Distributionensinne zu verstehen.

Bemerkung. Da C_0^∞ dicht in L^p liegt, kann auch mit Differentialformen aus L_1^2 getestet werden. Liegt ω in L^p, wählt man die Testformen aus L_1^q , $1/p+1/q = 1$.

Der Zusammenhang mit Variationsintegralen ergibt sich aus dem Dirichlet-Funktional

$$I\,(u, v) = \int_{I\!R^n} |\omega - du|^2 + |\omega - d^*v|^2\,. \tag{3.5}$$

Bildet man mit $\phi \in L_1^2(I\!R^n, \Lambda^{k-1})$ kogeschlossen, $\psi \in L_1^2(I\!R^n, \Lambda^{k+1})$ geschlossen die Variation

$$\tilde{I}\,(t, \tau) = I\,(u + t\phi, v + \tau\psi) \qquad t, \tau \in I\!R \tag{3.6}$$

und differenziert nach t beziehungsweise τ,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{I}(0,0) = 2\,(\omega - du, d\phi)\,, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{I}(0,0) = 2\,(\omega - d^*v, d^*\psi)\,, \tag{3.8}$$

so sind u und v genau dann Lösungen des inhomogenen Hodge-Systems, wenn sie stationäre Punkte von (3.5) sind. Das heißt, sie sind Nullstellen der Ableitungen (3.7) und (3.8).

Die Hodge-Zerlegung (2.26) von ω (vergleiche auch (2.33)) liefert die Lösungen von (3.3), denn

$$\omega \;=\; \mathcal{B}\omega + \mathcal{A}\omega \;=\; d\alpha + d^*\beta$$

und α erfüllt die erste Gleichung von (3.3), da

$$d^*\omega \;=\; d^*d\alpha \qquad , \qquad d^*\alpha \;=\; 0\,;$$

beziehungsweise β erfüllt die zweite Gleichung von (3.3), da

$$d\omega \;=\; dd^*\beta \qquad , \qquad d\beta \;=\; 0\,.$$

Folglich ist $du = \mathcal{B}\omega$ beziehungsweise $d^*v = \mathcal{A}\omega$.

Beispiel. Im Fall k=1 (siehe (2.19)) gilt

$$u \in L^p(I\!R^n) \quad , \quad du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx^i \quad , \quad d^*u = 0\,,$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \in L^p(I\!R^n, I\!R^n) \quad , \quad d^*\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = \operatorname{div}\omega\,.$$

Damit wird (3.3) zur Poisson-Gleichung

$$\Delta u \;=\; d^*du \;=\; \operatorname{div}\nabla u \;=\; \operatorname{div}\omega\,. \tag{3.9}$$

Die Lösung ergibt sich aus den Riesz-Transformationen in $I\!R^n$ (siehe Anhang),

$$\nabla u = -(R \otimes R)\,\omega = -\left(\sum_j R_i R_j \omega_j\right)_{i=1..n} \,. \tag{3.10}$$

Das Tensorprodukt $R \otimes R$ ist die $n \times n$ Matrix der Riesz-Transformationen zweiter Ordnung $R_{ij} = R_i \circ R_j$, $i, j = 1, ..., n$. Die Hodge-Zerlegung lautet

$$\omega = \nabla u + H \quad , \quad \operatorname{div} H = 0\,,$$

mit der gleichmäßigen Abschätzung (2.27)

$$\|\, \nabla u \,\|_p + \|\, H \,\|_p \quad \leq \quad C_p \,\|\, \omega \,\|_p\,.$$

Bemerkung. Die Konstante C_p ist aufgrund dimensionsfreier Abschätzungen in [IM2] unabhängig von n.

3.2 Die A-harmonische Gleichung in $\mathbb{R}^n$

Als natürliche Verallgemeinerung der harmonischen Tensoren und der p-harmonischen Funktionen definiert man die p-harmonischen Tensoren.

Definition 3.2 *Die Differentialformen $u \in L_1^p(\Omega, \Lambda^{k-1})$ und $v \in L_1^p(\Omega, \Lambda^{k+1})$, $p \geq 1$, heißen p-harmonische Tensoren, wenn sie Lösungen des Systems*

$$d^*(|du|^{p-2}du) \;=\; 0 \qquad , \qquad d^*u \;=\; 0 \tag{3.11}$$

oder des dualen Systems

$$d(|d^*v|^{p-2}d^*v) \;=\; 0 \qquad , \qquad dv \;=\; 0 \tag{3.12}$$

sind.

Bemerkung. Kogeschlossenes u beziehungsweise geschlossenes v sind stationär für das Variationsintegral

$$I(u,v) \;=\; \int_\Omega \Big(|du|^2 + |d^*v|^2\Big)^{p/2} . \tag{3.13}$$

Um zu noch allgemeineren Gleichungen zu kommen, sei $H : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda)$ eine beschränkte meßbare Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Werten in den symmetrischen linearen Transformationen der Graßmann-Algebra $\Lambda = \Lambda(\mathbb{R}^n)$. Zusätzlich erfülle H die Elliptizitätsbedingung

$$\lambda^{-1}|\xi| \;\leq\; \langle H(x)\xi, \xi \rangle^{1/2} \;=\; |\xi|_H \;\leq\; \lambda\,|\xi| \tag{3.14}$$

für alle $(x,\xi) \in \Omega \times \Lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Das heißt, die Matrix der Abbildung H ist insbesondere positiv definit. Die äußere Potenz der bei quasiregulären Abbildungen auftretenden Matrixdilatation $G_\#(x)$ erfüllt eine solche Elliptizitätsbedingung (vergleiche Kapitel 1 und 4).

Man betrachte das Funktional

$$I(u) \;=\; \frac{1}{p}\int_\Omega \langle H(x)du, du \rangle^{p/2} \qquad , \qquad u \in L_1^p(\Omega, \Lambda^{k-1}) , \tag{3.15}$$

bilde die Variation $\tilde{I}(t) = I(u + t\phi)$ mit $\phi \in L_1^p(\Omega, \Lambda^{k-1})$ und differenziere nach t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{I}(0) \;&=\; \int_\Omega \langle H(x)du, du \rangle^{\frac{p-2}{2}} \langle H(x)du, d\phi \rangle \\ &=\; \int_\Omega \langle A(x,du), d\phi \rangle . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Hierbei ist die nichtlineare Abbildung $A : \Omega \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$,

$$A(x,\xi) \;=\; \langle\, H(x)\xi, \xi\,\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(x)\xi\,, \tag{3.17}$$

die Ableitung der Funktion $\xi \mapsto \frac{1}{p}\langle H(x)\xi,\xi\rangle^{p/2}$, $\xi \in \Lambda$. Damit lautet die Euler-Lagrange-Gleichung für (3.15)

$$d^* A(x, du) \;=\; 0\,, \tag{3.18}$$

die auch A-harmonische Gleichung vom Typ p genannt wird. Es ergibt sich folglich, daß $u \in L_1^p(\Omega, \Lambda)$ genau dann stationär für (3.15) ist, wenn u die A-harmonische Gleichung erfüllt. Die schwache Formulierung für (3.18) lautet

$$\int_\Omega \langle\, A(x,du), d\phi\,\rangle \;=\; 0 \qquad \text{für alle} \quad \phi \in L_1^p(\Omega, \Lambda^{k-1})\,. \tag{3.19}$$

Bemerkung. Wird zu u eine geschlossene Form addiert, ändert sich du nicht. Aus der Hodgezerlegung für $\mathcal{X}_\Omega u = d\alpha + d^*\beta$, mit $\alpha, \beta \in L_1^p(\mathbb{R}^n, \Lambda)$ ($\mathcal{X}_\Omega$ ist die charakteristische Funktion von Ω), erkennt man, daß $u - d\alpha$ kogeschlossen in Ω ist. Folglich kann man annehmen, daß $d^* u = 0$ ist.

Ersetzt man in der A-harmonischen Gleichung (3.18) u durch $\star\, v$, mit einer Differentialform $v \in L_1^p(\Omega, \Lambda^{k+1})$, so erhält man mit (2.5) und (2.18)

$$d^* A(x, d\star v) \;=\; (-1)^{kn-k^2} \star d \star |d \star v|_H^{p-2} H(x) \star d^* v \;=\; 0$$

in Λ^{n-k-1} beziehungsweise

$$d\,|\star d^* v|_H^{p-2} \star H(x) \star d^* v \;=\; 0 \qquad \text{in } \Lambda^{k+1}\,.$$

Damit ergibt sich die duale A^*-harmonische Gleichung vom Typ p

$$dA^*(x, d^* v) \;=\; 0\,, \tag{3.20}$$

wobei $A^* :\ \Omega \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$ definiert ist durch

$$A^*(x,\xi) \;:=\; \star\, A(x, \star\xi) \;=\; \langle\, H^*(x)\xi, \xi\,\rangle^{\frac{p-2}{2}} H^*(x)\xi\,,$$

$$\text{mit} \qquad\qquad H^* \;:=\; \star\, H\, \star\,.$$

Nimmt man an, daß u kogeschlossen ist (vergleiche Bemerkung zu (3.19)) ist v automatisch geschlossen.

Um eine nichtlineare Entsprechung für die Hodge-Operatoren zu bekommen, wird folgendes Variationsproblem formuliert. Gegeben seien $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$ und $h \in L^q(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$, $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$,. Ohne Einschränkung sei $q \le p$, also $p \ge 2$. Gesucht ist das Minimum $u \in L_1^p(\mathbb{R}^n, \Lambda^{k-1})$ von

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big[\langle\, H(g+du), g+du\rangle^{p/2} -\, p\,\langle\, du, h\rangle\Big]\,. \tag{3.21}$$

Satz 3.3 *Es existiert eine eindeutige Differentialform* $u \in L^p_1(\mathbb{R}^n, \Lambda^{k-1})$, *die das Variationsintegral (3.21) minimiert.*

Beweis. Um die Existenz und Eindeutigkeit von u zu beweisen, genügt es nach Standardprinzipien der Variationsrechnung (siehe zum Beispiel [BaC] S.13), die strenge Konvexität der Abbildung $\mathcal{F} : \Lambda^k \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(\xi) \;=\; \langle\, H(x)(g(x)+\xi),\, g(x)+\xi\rangle^{p/2} \;-\; p\,\langle\, \xi, h(x)\rangle$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ zu zeigen. Da man Λ^k als $\binom{n}{k}$-dimensionalen euklidischen Raum auffassen kann (vergleiche Abschnitt 2.1), ist der Gradient von $\mathcal{F}$ punktweise

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} \;=\; \nabla \mathcal{F} \;=\; p\,\langle\, H(g+\xi), g+\xi\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(g+\xi) - p\,h\,.$$

Die Hessesche Matrix M der zweiten Ableitungen lautet

$$\begin{aligned} M \;&=\; \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right)_{i,j=1\ldots\binom{n}{k}} \\ &=\; \Big(p\,(p-2)\langle\, H(g+\xi), g+\xi\rangle^{\frac{p-4}{2}} H(g+\xi)_i\, H(g+\xi)_j \,+ \\ &\qquad p\,\langle\, H(g+\xi), g+\xi\rangle^{\frac{p-2}{2}} H_{ij}\Big)_{ij} \\ &=\; p\,\langle\, H(g+\xi), g+\xi\rangle^{\frac{p-4}{2}} \Big[\,(p-2)\, H(g+\xi)\otimes H(g+\xi) \;+ \\ &\qquad \langle\, H(g+\xi), g+\xi\rangle\Big]\,, \end{aligned}$$

wobei $H(g+\xi) = (H(g+\xi)_i)_{i=1\ldots\binom{n}{k}}$ als Multivektor zu verstehen ist und $H = (H_{ij})_{i,j=1\ldots\binom{n}{k}}$ die die lineare Abbildung H vermittelnde und nach (3.14) positiv definite $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}$ Matrix bezeichnet. Daraus folgt unter Berücksichtigung von $p \geq 2$ die positive Definitheit von M und damit die strenge Konvexität der Abbildung $\mathcal{F}$. $\square$

Bemerkungen. (i) Mit (3.14) genügt der erste Teil des Integranden von (3.21) $\mathcal{F}_g : \mathbb{R}^n \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}_g(x,\xi) \;=\; |g+\xi|^p_H \;=\; \langle\, H(g+\xi), g+\xi\rangle^{p/2}$$

der üblichen Wachstumsbeschränkung und Koerzivitätsbedingung, die im Satz von Lax-Milgram vorkommen (siehe zum Beispiel [Rek]),

$$C_1\,|g+\xi|^p \;\leq\; \mathcal{F}_g(x,\xi) \;=\; |g+\xi|^p_H \;\leq\; C_2\,|g+\xi|^p\,,$$

mit $C_1 = \lambda^{-p}$ und $C_2 = \lambda^p$.

(ii) Der zweite, inhomogene Anteil $p\langle\, du, h\rangle$ repräsentiert ein lineares Funktional $l_h :\ L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l_h(w) = p\langle\, w, h\rangle$, dessen Stetigkeit aus der Hölderschen Ungleichung $|\langle\, w, h\rangle| \leq \|w\|_p \|h\|_q$ folgt.

Die Lösung u findet man wieder aus der Euler-Lagrange-Gleichung, die wie vorher aus der nichtlinearen Abbildung A entsteht,

$$d^*A(x, g + du) \;=\; d^*h\,. \tag{3.22}$$

Man nennt (3.22) die inhomogene A-harmonische Gleichung in $\mathbb{R}^n$. Analog zu (3.20) ergibt sich die duale A^*-harmonische Gleichung

$$dA^*(x, g + d^*v) \;=\; dh\,. \tag{3.23}$$

Satz 3.4 *Für die Lösung u der inhomogenen A-harmonischen Gleichung*

$$d^*A(x, g + du) \;=\; d^*h$$

gilt die Abschätzung

$$\|du\|_p^p \;\leq\; C\,\left[\|h\|_q^q + \|g\|_p^p\right]\,, \tag{3.24}$$

mit einem $C = C(p, \lambda) > 0$.

Beweis. Da u das Variationsintegral (3.21) minimiert, folgt (auf der rechten Seite die Funktion eingesetzt, die in Λ^k identisch verschwindet)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g + du|_H^p \;-\; p\langle\, du, h\rangle \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} |g|_H^p\,,$$

woraus sich mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g + du|_H^p \;\leq\; p\int_{\mathbb{R}^n} |h||du| + \int_{\mathbb{R}^n} |g|_H^p$$

ergibt. Mit der Hölder-Ungleichung und (3.14) folgt

$$\lambda^{-p}\|g + du\|_p^p \;\leq\; p\,\|h\|_q\|du\|_p + \lambda^p\|g\|_p^p\,. \tag{3.25}$$

Andererseits gilt mit (1.6) und der Dreiecksungleichung

$$\|du\|_p^p = \|du + g - g\|_p^p \;\leq\; (\|du + g\|_p + \|g\|_p)^p \;\leq\; 2^p\left(\|g + du\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

beziehungsweise

$$\|g + du\|_p^p \;\geq\; 2^{-p}\|du\|_p^p - \|g\|_p^p\,.$$

In (3.25) eingesetzt, ergibt

$$\lambda^{-p}\left(2^{-p}\|du\|_p^p - \|g\|_p^p\right) \;\le\; p\,\|h\|_q\|du\|_p + \lambda^p\|g\|_p^p$$

beziehungsweise

$$2^{-p}\|du\|_p^p \;\le\; \lambda^p p\,\|h\|_q\|du\|_p + (\lambda^{2p}+1)\,\|g\|_p^p. \tag{3.26}$$

Man hat zwei Fälle zu unterscheiden.

<u>1.Fall:</u> $\|g\|_p \ge \|du\|_p$

Mit der Youngschen Ungleichung (1.4) gilt

$$\begin{aligned}\|du\|_p^p &\le 2^p\lambda^p\,\|du\|_p^p + \frac{2^p\lambda^p p}{q}\,\|h\|_q^q + 2^p(\lambda^{2p}+1)\,\|g\|_p^p\\ &\le \frac{2^p\lambda^p p}{q}\,\|h\|_q^q + 2^p(\lambda^{2p}+\lambda^p+1)\,\|g\|_p^p\\ &\le C_1(p,\lambda)\,\left[\|h\|_q^q + \|g\|_p^p\right]\,. \end{aligned}\tag{3.27}$$

<u>2.Fall:</u> $\|g\|_p \le \|du\|_p$

Aus (3.26) wird in diesem Fall

$$\begin{aligned}\|du\|_p^{p-1} &\le 2^p\lambda^p p\,\|h\|_q + 2^p(\lambda^{2p}+1)\frac{\|g\|_p^p}{\|du\|_p}\\ &\le 2^p\lambda^p p\,\|h\|_q + 2^p(\lambda^{2p}+1)\,\|g\|_p^{p-1}\,.\end{aligned}$$

Potenziert man mit $\frac{p}{p-1} = q$, ergibt sich wieder mit Ungleichung (1.6)

$$\begin{aligned}\|du\|_p^p &\le 2^{pq}\left(\lambda^p p\,\|h\|_q + (\lambda^{2p}+1)\,\|g\|_p^{p-1}\right)^q\\ &\le 2^{pq+q}\left(2^p\lambda^{qp}p^q\|h\|_q^q + (\lambda^{2p}+1)^q\|g\|_p^p\right)\\ &\le C_2(p,\lambda)\,\left[\|h\|_q^q + \|g\|_p^p\right]\,.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Mit $C = C(p,\lambda) := \max\,(C_1, C_2)$ folgt aus (3.27) und (3.28) die Behauptung.

□

Diese wichtige Abschätzung wird in Kapitel 7 in analoger Form für Exponenten ungleich p aufgestellt. Das bedeutet, daß (3.24) auch für in gewissem Sinne, vergleiche Definition 7.1, schwache Lösungen der A-harmonischen Gleichung gültig bleibt (siehe Theorem 1).

3.3 Konjugation zwischen p-harmonischen und q-harmonischen Tensoren

Gegeben sei die inhomogene A-harmonische Gleichung (3.22). Für ein vorgegebenes $\eta \in \Lambda(I\!R^n)$ löse man die algebraische Gleichung $A(x,\xi) = \eta$ mit $\xi \in \Lambda(I\!R^n)$. Es gilt

$$\xi \;=\; A^{-1}(x,\eta) \;=\; \langle\, H^{-1}(x)\eta, \eta\rangle^{\frac{q-2}{2}} H^{-1}(x)\,\eta\,. \tag{3.29}$$

Diese Identität läßt sich mit der Definition der Abbildung A (3.17) und mit $q = \frac{p}{p-1}$ nachweisen, denn

$$\begin{aligned}
\xi \;&=\; \langle\, H^{-1}(x)A(x,\xi), A(x,\xi)\rangle^{\frac{q-2}{2}} H^{-1}(x)A(x,\xi) \\
&=\; \langle H^{-1}(x)\langle\, H(x)\,\xi,\xi\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(x)\,\xi\,,\, \langle\, H(x)\,\xi,\xi\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(x)\,\xi\rangle^{\frac{q-2}{2}} \cdot \\
&\quad\; H^{-1}(x)\langle\, H(x)\,\xi,\xi\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(x)\,\xi \\
&=\; \Big(\langle\, H(x)\,\xi,\xi\rangle^{p-2}\langle\,\xi, H(x)\,\xi\rangle\Big)^{\frac{q-2}{2}} \langle\, H(x)\,\xi,\xi\rangle^{\frac{p-2}{2}}\xi \\
&=\; \langle\, H(x)\,\xi,\xi\rangle^{(p-1)\frac{q-2}{2}+\frac{p-2}{2}}\xi \;=\; \langle\, H(x)\,\xi,\xi\rangle^{q\,(p-1)-p}\xi \;=\; \xi\,.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.19 gilt für die laut (3.22) kogeschlossene Form $A(x, g + du) - h$, daß ein $v \in L_1^q(I\!R^n, \Lambda)$ mit $dv = 0$ existiert, so daß

$$A(x, g + du) - h \;=\; d^*v\,.$$

Damit ist

$$g + du \;=\; A^{-1}(x, h + d^*v)\,. \tag{3.30}$$

Zur gewünschten konjugierten Gleichung kommt man durch Anwendung des äußeren Ableitungsoperators,

$$dA^{-1}(x, h + d^*v) \;=\; dg\,. \tag{3.31}$$

Hat man diese Gleichung für v gelöst, ergibt sich u aus (3.30). Damit ist die Äquivalenz zwischen A-harmonischer Gleichung und ihrer konjugierten Gleichung gezeigt, die im Beweis von Theorem 1 (siehe Abschnitt 7.2) benötigt wird.

4 p-harmonische Gleichungen für quasireguläre Abbildungen

In diesem Abschnitt soll hergeleitet werden, wie man, ausgehend von einer schwach K-quasiregulären Abbildung, mit Hilfe von Differentialformen auf p-harmonische Gleichungen kommen kann.

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $f = (f^1, f^2, ..., f^n)$ eine Abbildung aus dem Raum $W^{1,s}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Zu jedem festen, geordneten System $I = (i_1, i_2, ..., i_l)$ gibt es ein komplementäres, geordnetes System $J = (j_1, j_2, ..., j_{n-l})$, festgelegt durch die Vorschrift

$$dx_I \quad = \quad \star\, dx_J\ . \tag{4.1}$$

Mit $s \geq \max\{l, n-l\}$ seien jedem Paar (I, J) die Differentialform

$$u_I \ = \ f^{i_l} df^{i_1} \wedge ... \wedge df^{i_{l-1}} \quad \in \ L^{\frac{n}{n-1}}_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^{l-1}) \tag{4.2}$$

und die dazu konjugierte Differentialform

$$v_J \ = \ (-1)^{n+1} \star f^{j_1} df^{j_2} \wedge ... \wedge df^{j_{n-l}} \quad \in \ L^{\frac{n}{n-1}}_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^{l+1}) \tag{4.3}$$

zugeordnet. Der Grad der Integrabilität folgt jeweils aus dem Sobolevschen Einbettungssatz (Satz 1.13). Mit $u_I \in W^{1,s}_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda)$ liegt u_I auch in dem Raum $L^{s'}_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda)$, wobei $s' = \frac{sn}{n-s}$. Mit $\frac{sn}{n-s} > \frac{n}{n-1}$ folgt $u_I \in L^{\frac{n}{n-1}}_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda)$. Desgleichen gilt auch für v_J.

Die Differentialformen du_I und $d^* v_J$ sind reguläre Distributionen. Sie haben die Darstellung

$$\begin{aligned} du_I \ &= \ df^{i_l} \wedge df^{i_1} \wedge ... \wedge df^{i_{l-1}} \\ &= \ (-1)^{l-1} df^{i_1} \wedge ... \wedge df^{i_l} \quad \in \ L^1_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^l) \end{aligned} \tag{4.4}$$

und mit der Definition des Hodge-Sternoperators (2.5) und des Hodge-Koableitungsoperators (2.17)

$$\begin{aligned} d^* v_J \ &= \ (-1)^{nl+1} \star d \star v_J \\ &= \ (-1)^{n+1}(-1)^{nl+1} \star d \star \star f^{j_1} df^{j_2} \wedge ... \wedge df^{j_{n-l}} \\ &= \ (-1)^{n+1}(-1)^{nl+1}(-1)^{(n-l-1)(l+1)} \star df^{j_1} \wedge ... \wedge df^{j_{n-l}} \\ &= \ (-1)^{n+1}(-1)^{-l^2-l-l+n} \star df^{j_1} \wedge ... \wedge df^{j_{n-l}} \\ &= \ (-1)^{l+1} \star df^{j_1} \wedge ... \wedge df^{j_{n-l}} \quad \in \ L^1_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^l)\ , \end{aligned} \tag{4.5}$$

da $l^2 + l$ gerade.

Sei nun $f \in W^{1,s}_{\text{loc}}(\Omega, I\!R^n)$, $s = \max\{l, n-l\}$, schwach K-quasiregulär mit der Matrixdilatation $G(x)$. Die Matrixdilatation $G(x)$, auch Metriktensor von f genannt, hat die Darstellung (siehe (1.17))

$$G(x) \;=\; J(x,f)^{-\frac{2}{n}} D^t f(x) Df(x) \;, \tag{4.6}$$

für $J(x,f) \neq 0$, sonst $G(x) = Id$. Direkt aus der Darstellung folgt, daß $G(x)$ symmetrisch ist und $\det G(x) = 1$. Sind $0 < \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq ... \leq \lambda_n(x)$ die Eigenwerte von $G(x)$, dann bestehen die Eigenwerte von $G_\#(x) : \Lambda^l \to \Lambda^l$ aus den Produkten $\lambda_{k_1}(x)\lambda_{k_2}(x)...\lambda_{k_l}(x)$ über alle geordneten Systeme $K = (k_1, ..., k_l)$, $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_l \leq n$ (siehe Abschnitt 2.2). Hierbei ist $G_\#(x)$ die l-te äußere Potenz von $G(x)$, vergleiche Definition 2.2.

Die lineare Abbildung $Df(x) : I\!R^n \to I\!R^n$ mit $Df(x) \in \mathrm{GL}(n)$ bildet die n-dimensionale Einheitskugel auf einen um den Ursprung zentrierten Ellipsoiden $E(Df(x))$ ab. Seien $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n$ die Längen der Halbachsen von $E(Df(x))$, dann gilt mit (2.9) und (2.10)

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\gamma_i}{\gamma_j} \tag{4.7}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Lemma 4.1 *Ist $f \in W^{1,s}_{\text{loc}}(\Omega, I\!R^n)$ schwach K-quasiregulär und sind $0 < \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq ... \leq \lambda_n(x)$ die Eigenwerte der Matrixdilatation $G(x)$, dann gilt die Dilatationsbedingung*

$$\lambda_i(x) \;\leq\; K^2 \lambda_j(x) \tag{4.8}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Beweis. Es gilt

$$\lambda_i(x)\lambda_1(x) \;\leq\; \lambda_1(x)\lambda_n(x) \;\leq\; \lambda_j(x)\lambda_n(x)$$

und mit (4.7) ist

$$\lambda_i(x) \;\leq\; \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_1(x)}\lambda_j(x) \;=\; \left(\frac{\gamma_n(x)}{\gamma_1(x)}\right)^2 \lambda_j(x) \;=\; K^2 \lambda_j(x) \;.$$

□

Lemma 4.2 *Die durch den Metriktensor $G_\#$ erzeugte Norm ist äquivalent zur euklidischen Norm und es gilt die Abschätzung*

$$K^{\frac{l(l-n)}{n}} |\xi| \;\leq\; \langle\, G_\#(x)\xi, \xi \,\rangle^{\frac{1}{2}} \;\leq\; K^{\frac{l(n-l)}{n}} |\xi| \tag{4.9}$$

für alle $\xi \in \Lambda^l(I\!R^n)$.

Beweis. Aus der Darstellung der Matrixdilatation $G(x)$ (4.6) folgt

$\langle\, G_{\#}\xi, \xi\,\rangle^{\frac{1}{2}} \;=\; J(x,f)^{-\frac{l}{n}} \langle\, (Df(x))_{\#}\xi, (Df(x))_{\#}\xi\,\rangle^{\frac{1}{2}} \;=\; J(x,f)^{-\frac{l}{n}} |(Df(x))_{\#}\xi|\,.$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} J(x,f)^{-\frac{l}{n}} \min_{|\xi|=1} |(Df(x))_{\#}\xi| &\le \frac{J(x,f)^{-\frac{l}{n}} |(Df(x))_{\#}\xi|}{|\xi|} \\ &\le J(x,f)^{-\frac{l}{n}} \max_{|\xi|=1} |(Df(x))_{\#}\xi|\,, \end{aligned}$$

das heißt, es ist zu zeigen, daß

$$J(x,f)^{-\frac{l}{n}} \max_{|\xi|=1} |(Df(x))_{\#}\xi| \;\le\; K^{\frac{l(n-l)}{n}}$$

beziehungsweise

$$J(x,f)^{-l} \left(\max_{|\xi|=1} |(Df(x))_{\#}\xi| \right)^{n} \;\le\; K^{l(n-l)}\,.$$

Da $J(x,f)^2 = \det(Df(x))^2 = \det(Df(x)D^tf(x))$ gilt mit (2.9), (2.10), (4.7) und der Dilatationbedingung (4.8)

$$\begin{aligned} J(x,f)^{-l} \left(\max_{|\xi|=1} |(Df(x))_{\#}\xi| \right)^{n} &= J(x,f)^{-l} \left(\gamma_{n-l+1}(x) \,...\, \gamma_n(x)\right)^{n} \\ &= \frac{\left(\gamma_{n-l+1}(x) \,...\, \gamma_n(x)\right)^{n}}{\left(\gamma_1(x) \,...\, \gamma_n(x)\right)^{l}} \\ &= \frac{\left(\gamma_{n-l+1}(x) \,...\, \gamma_n(x)\right)^{n-l}}{\left(\gamma_1(x) \,...\, \gamma_{n-l}(x)\right)^{l}} \\ &\le \frac{\left(\lambda_{n-l+1}(x) \,...\, \lambda_n(x)\right)^{\frac{n-l}{2}}}{\left(\lambda_1(x) \,...\, \lambda_{n-l}(x)\right)^{\frac{l}{2}}} \\ &\le K^{l(n-l)} \end{aligned}$$

und folglich ist

$$\langle\, G_{\#}\xi, \xi\,\rangle^{\frac{1}{2}} \;\le\; K^{\frac{l(n-l)}{n}} |\xi|\,.$$

Da mit $\lambda_i/\lambda_j \le K^2$ auch $\lambda_j/\lambda_i \ge 1/K^2$ gilt, folgt die Abschätzung nach unten analog. □

Um den Zusammenhang zu Kapitel 3 herzustellen, sei die lineare Abbildung $H(x) : \Lambda(\mathbb{R}^n) \to \Lambda(\mathbb{R}^n)$ eingeführt, mit

$$H(x) \;=\; G_{\#}^{-1}(x) \tag{4.10}$$

für l-Vektoren, $l = 0, 1, ..., n$.

Lemma 4.3 *Für du_I, $d^*v_J \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^l)$ gilt*

$$H(x)du_I \;=\; J(x,f)^{\frac{2l}{n}-1} d^*v_J \,. \tag{4.11}$$

Beweis. Mit der Definition der Zurückholung f^* (2.23) und Lemma 2.15 gilt

$$du_I \;=\; (-1)^{l-1} f^* dx_I \;=\; (-1)^{l-1} (D^t f(x))_\# dx_I \tag{4.12}$$

und

$$d^*v_J \;=\; (-1)^{l+1} \star f^* dx_J \;=\; (-1)^{l+1} \star (D^t f(x))_\# dx_J \,. \tag{4.13}$$

Wendet man auf die Abbildung $D^t f(x)$ (2.8) für $(n-l)$-Formen an, ergibt sich mit (4.1)

$$\star (D^t f(x))_\# \;=\; J(x,f)^{1-\frac{2l}{n}} G_\#^{-1}(x) (D^t f(x))_\# \star$$

und mit (4.12) und (4.13)

$$\begin{aligned}
H^{-1}(x) J(x,f)^{\frac{2l}{n}-1} d^*v_J \;&=\; J(x,f)^{\frac{2l}{n}-1} G_\#(x) d^*v_J \\
&=\; J(x,f)^{\frac{2l}{n}-1} G_\#(x) (-1)^{l+1} \star (D^t f(x))_\# dx_J \\
&=\; (-1)^{l+1} G_\#(x) G_\#^{-1}(x) (D^t f(x))_\# \star dx_J \\
&=\; (-1)^{l-1} (D^t f(x))_\# dx_I \\
&=\; du_I \,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

□

Korollar 4.4 *Für die Jacobi-Determinante $J(x,f)$ der Abbildung $f \in W^{1,s}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $s = \max\{l, n-l\}$, gilt*

$$J(x,f) \;=\; \langle\, du_I, d^*v_J \,\rangle \,. \tag{4.14}$$

Beweis. Wieder mit (2.23), (2.25) und mit Satz 2.3 folgt

$$\begin{aligned}
J(x,f) \;&=\; \det(Df(x)) \star \mathrm{Vol} \;=\; \star \det(D^t f(x)) \mathrm{Vol} \\
&=\; \star (D^t f(x))_\# \mathrm{Vol} \;=\; \star (df^1 \wedge \ldots \wedge df^n) \\
&=\; \star f^* \mathrm{Vol} \,,
\end{aligned}$$

siehe hierzu auch [Fla] S.8. Mit der Definition des Hodge-Sternoperators (2.4) und mit (4.1) gilt

$$\begin{aligned}
dx_I \wedge \star\star dx_J \;&=\; \langle\, dx_I, \star dx_J \,\rangle \mathrm{Vol} \;=\; \langle\, dx_I, dx_I \,\rangle \mathrm{Vol} \\
&=\; \mathrm{Vol} \quad .
\end{aligned}$$

Beides zusammengenommen ergibt mit (4.12) und (4.13)

$$\begin{aligned} J(x,f) &= \star f^*(dx_I \wedge \star\star dx_J) \;=\; \star(f^*dx_I \wedge f^* \star\star dx_J) \\ &= \star(f^*dx_I \wedge \star\star f^*dx_J) \;=\; \star(du_I \wedge \star d^*v_J) \\ &= \star\langle\, du_I, d^*v_J \,\rangle \mathrm{Vol} \;=\; \langle\, du_I, d^*v_J \,\rangle \,. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.5 *Die Jacobi-Determinante $J(x,f)$ der Abbildung $f \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega, I\!R^n)$, $s = \max\{l, n-l\}$, hat die Darstellung*

$$J(x,f) \;=\; |du_I|^p_H \;=\; |d^*v_J|^q_{H^{-1}} \quad , \tag{4.15}$$

mit $p = \frac{n}{l}$ und $q = \frac{n}{n-l}$.

Beweis. Mit (4.11) und (4.14) ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle\, H(x)du_I, du_I \,\rangle &= J(x,f)^{\frac{2l}{n}-1} \langle\, d^*v_J, du_I \,\rangle \\ &= J(x,f)^{\frac{2l}{n}-1} \langle\, du_I, d^*v_J \,\rangle \\ &= J(x,f)^{\frac{2l}{n}} \end{aligned}$$

und damit

$$\langle\, H(x)du_I, du_I \,\rangle^{\frac{n}{2l}} \;=\; |du_I|^p_H \;=\; J(x,f)$$

für $p = \frac{n}{l}$. Genauso gilt

$$\begin{aligned} \langle\, H^{-1}(x)d^*v_J, d^*v_J \,\rangle &= J(x,f)^{1-\frac{2l}{n}} \langle\, du_I, d^*v_J \,\rangle \\ &= J(x,f)^{\frac{2(n-l)}{n}} \end{aligned}$$

und damit

$$\langle\, H^{-1}(x)d^*v_J, d^*v_J \,\rangle^{\frac{n}{2(n-l)}} \;=\; |d^*v_J|^q_{H^{-1}} \;=\; J(x,f)$$

für $q = \frac{n}{n-l}$.

□

An diesem Punkt sei an die nichtlineare Abbildung $A : \Omega \times \Lambda^l \to \Lambda^l$ aus (3.17)

$$A(x,\xi) \;=\; \langle\, H(x)\xi, \xi \,\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(x)\xi \tag{4.16}$$

mit $p = \frac{n}{l}$ und die dazu konjugierte Abbildung $A^{-1} : \Omega \times \Lambda^l \to \Lambda^l$ aus (3.29)

$$A^{-1}(x,\xi) \;=\; \langle\, H(x)^{-1}\xi, \xi \,\rangle^{\frac{q-2}{2}} H^{-1}(x)\xi \tag{4.17}$$

mit $q = \frac{n}{n-l}$ erinnert. Es gilt $1/p + 1/q = 1$. Wendet man (4.16) auf die Differentialform du_I an, erhält man mit Hilfe von (4.11) und (4.15)

$$\begin{aligned} A(x, du_I) &= \langle\, H(x) du_I, du_I \,\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(x) du_I \\ &= |du_I|_H^{p-2} J(x,f)^{\frac{2l}{n}-1} d^* v_J \\ &= J(x,f)^{1-\frac{2}{p}} J(x,f)^{\frac{2}{p}-1} d^* v_J \end{aligned}$$

und damit

$$A(x, du_I) \;=\; d^* v_J \;. \tag{4.18}$$

Wendet man (4.17) auf die Differentialform $d^* v_J$ an, erhält man genauso

$$\begin{aligned} A^{-1}(x, d^* v_J) &= \langle\, H(x)^{-1} d^* v_J, d^* v_J \,\rangle^{\frac{q-2}{2}} H^{-1}(x) d^* v_J \\ &= |d^* v_J|_{H^{-1}}^{q-2} J(x,f)^{1-\frac{2l}{n}} du_I \\ &= J(x,f)^{1-\frac{2(n-l)}{n}} J(x,f)^{1-\frac{2l}{n}} du_I \end{aligned}$$

und damit

$$A^{-1}(x, d^* v_J) \;=\; du_I \;. \tag{4.19}$$

Der Hodge-Koableitungsoperator d^* angewandt auf (4.18) ergibt

$$d^* A(x, du_I) \;=\; 0 \;. \tag{4.20}$$

Wie in (3.18) hergeleitet, ist dies nichts anderes als die A-harmonische Gleichung vom Typ p für du_I. Wendet man auf (4.19) den äußeren Ableitungsoperator d an, ergibt sich

$$dA^{-1}(x, d^* v_J) \;=\; 0 \;. \tag{4.21}$$

Dies entspricht der zu (4.20) konjugierten A^{-1}-harmonischen Gleichung vom Typ q für $d^* v_J$.

Bemerkung. Im Falle gerader Dimensionen $n = 2l$ wird sowohl p als auch q zu 2. Folglich reduzieren sich (4.20) und (4.21) zu den linearen Gleichungen

$$H(x) du_I \;=\; d^* v_J \tag{4.22}$$

und

$$H^{-1}(x) d^* v_J \;=\; du_I \;. \tag{4.23}$$

Sie stellen den linearen Zusammenhang der Determinanten der $l \times l$ Untermatritzen der Abbildung $Df(x)$ dar (vergleiche [IM1] S.33).

Beispiel. Im Falle $n = 2l = 2$ und $K = 1$ wird $H(x)$ zur identischen Abbildung, das heißt

$$du_I \;=\; d^* v_J \;. \tag{4.24}$$

Setzt man $I = \{2\}$ und $J = \{1\}$ wird (4.1) zu $\star\, dx_1 \;=\; dx_2$. Folglich ist

$$du_I \;=\; df^2 \;=\; \frac{\partial f^2}{\partial x_1} dx_1 \;+\; \frac{\partial f^2}{\partial x_2} dx_2$$

und

$$\begin{aligned} d^* v_J \;=\; \star\, df^1 \;&=\; \star \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_1} dx_1 \;+\; \frac{\partial f^1}{\partial x_2} dx_2 \right) \\ &=\; \frac{\partial f^1}{\partial x_1} dx_2 \;-\; \frac{\partial f^1}{\partial x_2} dx_1 \;. \end{aligned}$$

Mit (4.24) ergeben sich die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_1} \;=\; -\frac{\partial f^1}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f^1}{\partial x_1} \;=\; \frac{\partial f^2}{\partial x_2}$$

für eine analytische Funktion in 2 Dimensionen.

In Abschnitt 8 werden die folgenden Abschätzungen der Differentialformen u_I, v_J beziehungsweise du_I, $d^* v_J$ (siehe (4.2) bis (4.5)) benötigt.

Lemma 4.6 *Es gilt*

$$\text{(i)} \qquad |u_I| \;\le\; |f|\,|Df(x)|^{l-1} \quad , \quad |v_J| \;\le\; |f|\,|Df(x)|^{n-l-1} \,, \tag{4.25}$$

$$\text{(ii)} \qquad |du_I| \;\le\; |Df(x)|^l \;\le\; K^l |du_I| \,, \tag{4.26}$$

$$\text{(iii)} \qquad |d^* v_J| \;\le\; |Df(x)|^{n-l} \;\le\; K^{n-l} |d^* v_J| \,. \tag{4.27}$$

Beweis. (i) Allgemein gilt für $f = (f^1, f^2, ..., f^n) \in W^{1,s}_{\text{loc}}(\Omega, I\!R^n)$

$$|df^k| \;\le\; |Df(x) dx_I| \;\le\; |Df(x)|$$

für alle $k = 1, ..., n$ und damit

$$\begin{aligned} |u_I| \;&=\; |f^{i_l} df^{i_1} \wedge ... \wedge df^{i_{l-1}}| \\ &\le\; |f^{i_l}|\,|df^{i_1}| ... |df^{i_{l-1}}| \;\le\; |f|\,|Df(x)|^{l-1} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v_J| \;&=\; |(-1)^{n+1} \star f^{j_1} df^{j_2} \wedge ... \wedge df^{j_{n-l}}| \\ &\le\; |f^{j_1}|\,|df^{j_2}| ... |df^{j_{n-l}}| \;\le\; |f|\,|Df(x)|^{n-l-1} \,. \end{aligned}$$

(ii) Die erste Ungleichung folgt aus (4.25), die zweite folgt mit Darstellung (4.12) für du_I und Lemma 2.6, angewandt auf $D^t f(x)$ und dx_I. Dann ist

$$|Df(x)|^l \;=\; |D^t f(x)|^l \;\leq\; K^l |(D^t f(x))_\# dx_I| \;=\; K^l |du_I| \;.$$

(iii) Mit Darstellung (4.13) für $d^* v_J$ und Lemma 2.6, diesmal angewandt auf $D^t f(x)$ und dx_J, folgt

$$|Df(x)|^{n-l} \;\leq\; K^{n-l} |(D^t f(x))_\# dx_J| \;=\; K^{n-l} |d^* v_J| \;.$$

□

5 Spezielle L^p-Mittelwerte

In späteren Beweisen spielen einige Aussagen über L^p-Mittelwerte eine wichtige Rolle. Diese eher technischen und sehr speziellen Hilfsmittel lassen sich durch elementare analytische Methoden zeigen.

Sei E eine meßbare Menge in $\mathbb{R}^n$ mit positivem, endlichem Maß, $\mathcal{H}$ ein endlich-dimensionaler Hilbertraum und $h \in L^p(E, \mathcal{H})$, $0 < p < \infty$. Es bezeichnet

$$[h]_{p,E} \;=\; \left(\fint_E |h|^p \right)^{1/p} \;=\; \left(\frac{1}{|E|} \int_E |h|^p \right)^{1/p}$$

den L^p-Mittelwert von $|h|$ über E.

5.1 Eine Abschätzung für $p = \frac{4}{3}$

Hauptergebnis dieses Abschnittes ist ein Lemma für $L^{\frac{4}{3}}$-Mittelwerte.

Lemma 5.1 *Sei $\varepsilon > -1$ und $|\omega|^\varepsilon \omega \in L^{\frac{5}{3}}(E, \mathcal{H})$. Dann existiert eine Konstante $a \geq 0$, so daß*

$$[\,|\omega|^\varepsilon \omega - a\,\omega]_{\frac{4}{3},E} \;\leq\; 57|\varepsilon|\,[\,|\omega|^\varepsilon \omega]_{\frac{5}{3},E}\,. \tag{5.1}$$

Um (5.1) zu beweisen, werden zwei Hilfslemmata benötigt.

Lemma 5.2 *Sei $q > r > 0$, $h \in L^q(E)$ nicht negativ und $0 < |E| < \infty$. Dann gilt*

$$\fint_E h^r \log^2 \frac{h}{[h]_{q,E}} \;\leq\; \frac{q^2}{r^2(q-r)^2}\,[h]^r_{q,E}\,. \tag{5.2}$$

Beweis. Man betrachte die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log^2 x$. Sie ist monoton wachsend und für $x \leq e$ konvex, beziehungsweise für $x \geq e$ konkav, da die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{2}{x^2}(1 - \log x)$ an der Stelle e verschwindet. Für die lineare Funktion $g(x) = \frac{4}{e^2}x$ gilt

$$g(1) \;=\; \frac{4}{e^2} \;>\; 0 \;=\; f(1)\,,\; g(e) \;=\; \frac{4}{e} \;>\; 1 \;=\; f(e)\,,$$

und für die Ableitung gilt $g'(e^2) = \frac{4}{e^2} = f'(e^2)$. Da f bei $x = e^2$ streng konvex ist, folgt für $x \geq 1$

$$f(x) \;=\; \log^2 x \;\leq\; \frac{4}{e^2}x \;=\; g(x) \;<\; x\,. \tag{5.3}$$

Ersetzt man x durch h^{q-r}, $h \geq 1$, $q > r > 0$, ergibt sich

$$\log^2 h^{q-r} \;\leq\; h^{q-r} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad h^r \log^2 h \;\leq\; \frac{h^q}{(q-r)^2}\,. \tag{5.4}$$

Ist $0 < h \leq 1$, ersetzt man x durch $h^{-r} \geq 1$ in (5.3) und erhält analog

$$h^r \log^2 h \;\leq\; \frac{1}{r^2}\,. \tag{5.5}$$

In beiden Fällen (5.4) und (5.5) gilt

$$h^r \log^2 h \;\leq\; \frac{1}{r^2} + \frac{h^q}{(q-r)^2} \tag{5.6}$$

für $h \geq 0$. Bildet man den Mittelwert über E und ersetzt h durch $\frac{h}{c}$, mit $c = [h]_{q,E}$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\fint_E \left(\frac{h}{c}\right)^r \log^2 \frac{h}{c} \;&\leq\; \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(q-r)^2}\frac{[h]_{q,E}^q}{c^q} \;=\; \frac{(q-r)^2 + r^2}{r^2\,(q-r)^2} \\
&=\; \frac{q^2 - 2qr + 2r^2}{r^2\,(q-r)^2} \;\leq\; \frac{q^2}{r^2(q-r)^2}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 5.2 bewiesen. □

Lemma 5.3 *Sei $h \in L^{\frac{9}{4}}(E)$, $h \geq 0$ und $-\frac{1}{10} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{10}$. Dann existiert eine Konstante $a \geq 0$, so daß*

$$[h^{1+\varepsilon} - a\,h]_{2,E} \quad\leq\quad 36|\varepsilon| \left(\fint_E h^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4+4\varepsilon}{9}}\,. \tag{5.7}$$

Beweis. Die günstigste Konstante a findet man, wenn die Funktion

$$f(a) \;=\; \fint_E \left|h^{1+\varepsilon} - a\,h\right|^2$$

minimiert wird, das heißt, wenn die linke Seite von (5.7) bezüglich des Parameters a am kleinsten wird. Die erste Ableitung

$$f^{'}(a) = 2\fint_E \left(a\,h^2 - h^{2+\varepsilon}\right)$$

gleich null gesetzt, ergibt

$$a \;=\; \frac{\fint_E h^{2+\varepsilon}}{\fint_E h^2}\,.$$

Mit diesem a erhält man

$$\begin{aligned}
\fint_E |h^{1+\varepsilon} - a\,h|^2 \;&=\; \fint_E (h^{2+2\varepsilon} + a^2 h^2 - 2\,h^{2+\varepsilon} a) \\
&=\; \fint_E h^{2+2\varepsilon} + \left(\fint_E h^{2+\varepsilon}\right)^2 \left(\fint_E h^2\right)^{-2} \fint_E h^2 \\
&\quad - 2\fint_E h^{2+\varepsilon} \fint_E h^{2+\varepsilon} \left(\fint_E h^2\right)^{-1} \\
&=\; \fint_E h^{2+2\varepsilon} - \left(\fint_E h^{2+\varepsilon}\right)^2 \left(\fint_E h^2\right)^{-1}\,.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Es wird die Funktion

$$\phi(t) \;=\; \fint_E h^{2+2t} - \frac{\left(\fint_E h^{2+t}\right)^2}{\fint_E h^2}$$

für $|t| \le \frac{1}{10}$ untersucht. Nach (5.8) ist $\phi(t) \ge 0$ und außerdem $\phi(0) = 0$. Für die erste Ableitung gilt

$$\phi'(t) \;=\; 2\fint_E h^{2+2t}\log h \;-\; 2\fint_E h^{2+t}\fint_E h^{2+t}\log h \left(\fint_E h^2\right)^{-1} .$$

Man sieht, daß $\phi'(0) = 0$. Die zweite Ableitung kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \phi''(t) \;&=\; 4\fint_E h^{2+2t}\log^2 h - 2\left(\fint_E h^{2+t}\log h\right)^2 \left(\fint_E h^2\right)^{-1} \\ &\quad -2\fint_E h^{2+t}\fint_E h^{2+t}\log^2 h \left(\fint_E h^2\right)^{-1} \\ &\le\; 4\fint_E h^{2+2t}\log^2 h\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wendet man Lemma 5.2 mit $q = \frac{9}{4} > 2 + 2t = r$ an, so wird daraus

$$\phi''(t) \;\le\; 4\,\frac{81}{16}\,\frac{[h]^r_{\frac{9}{4},E}}{(2+2t)^2(\frac{1}{4} - 2t)^2} \le 50^2[h]^r_{\frac{9}{4},E}\,. \tag{5.10}$$

Die Taylorentwicklung um 0 mit Restglied zweiten Grades ist

$$\phi(\varepsilon) \;=\; \phi'(0)\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\phi''(\tau)\,\varepsilon^2 \;\le\; \frac{1}{2}\,50^2\,[h]^r_{\frac{9}{4},E}\,\varepsilon^2\,,$$

wobei $-\frac{1}{10} \le \tau \le \frac{1}{10}$. Da Abschätzung (5.10) für alle $|t| \le \frac{1}{10}$ gilt, bleibt sie auch speziell für $t = \varepsilon$ (da $-\frac{1}{10} \le \varepsilon \le \frac{1}{10}$) richtig. Damit und mit $\frac{1}{2}50^2 < 6^4$ ergibt sich die Behauptung (5.7). □

Es folgt der Beweis von Lemma 5.1.

Beweis. 1.Fall: $|\varepsilon| \le \frac{16}{250}$

Setzt man $h = |\omega|^{\frac{16}{25}}$ und $\nu = \frac{25\varepsilon}{16}$, so wird $|\nu| \le \frac{1}{10}$. Lemma 5.3 mit ν für ε angewandt, ergibt mit der Hölder-Ungleichung ($p = \frac{3}{2}$, $q = 3$)

$$\fint_E ||\omega|^\varepsilon\omega - a\omega|^{\frac{4}{3}} \;=\; \fint_E (|\omega|\,||\omega|^\varepsilon - a|)^{\frac{4}{3}} \;=\; \fint_E (|\omega||h^\nu - a|)^{\frac{4}{3}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \fint_E |\omega|^{\frac{12}{25}} |h^{\nu+1} - ah|^{\frac{4}{3}} \;\le\; \left(\fint_E |\omega|^{\frac{36}{25}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\fint_E |h^{\nu+1} - ah|^2\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \left(36\,|\nu| \left(\fint_E h^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4+4\nu}{9}}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\fint_E |\omega|^{\frac{36}{25}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{225}{4}\,|\varepsilon|\right)^{\frac{4}{3}} \left(\fint_E |\omega|^{\frac{36}{25}}\right)^{\frac{16+25\varepsilon}{36}\frac{4}{3}} \left(\fint_E |\omega|^{\frac{36}{25}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{225}{4}\,|\varepsilon|\right)^{\frac{4}{3}} \left(\fint_E |\omega|^{\frac{36}{25}}\right)^{\frac{25+25\varepsilon}{27}} .
\end{aligned}
$$

Es ist $-\frac{17}{125} < -\frac{16}{250} < \varepsilon$. Durch einfaches Umformen folgt daraus $\frac{108}{125} < \varepsilon + 1$ beziehungsweise $\frac{36}{25} < \frac{5}{3}(\varepsilon+1)$. Mit der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung (1.2), $p = \frac{5}{3}(\varepsilon+1)$, $r = \frac{36}{25}$, $r < p$, und mit $\frac{225}{4} < 57$ erhält man

$$
\begin{aligned}
[\,|\omega|^{\varepsilon}\omega - a\,\omega]_{\frac{4}{3},E} \;&\le\; 57\,|\varepsilon| \left(\fint_E |\omega|^{\frac{36}{25}}\right)^{\frac{25}{36}(1+\varepsilon)} \\
&\le\; 57\,|\varepsilon| \left(\fint_E |\omega|^{\frac{5}{3}(\varepsilon+1)}\right)^{\frac{3}{5}} = 57\,|\varepsilon|\,[\,|\omega|^{\varepsilon}\omega]_{\frac{5}{3},E}\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist (5.1) für $|\varepsilon| \le \frac{16}{250}$ bewiesen.

2.Fall: $|\varepsilon| > \frac{16}{250}$

Dieser Fall ist wesentlich einfacher, da $57\,|\varepsilon| > 1$. Wählt man $a = 0$, liefert die Höldersche Ungleichung die gewünschte Abschätzung

$$
[\,|\omega|^{\varepsilon}\omega]_{\frac{4}{3},E} \;\le\; [\,|\omega|^{\varepsilon}\omega]_{\frac{5}{3},E} \;\le\; 57\,|\varepsilon|\,[\,|\omega|^{\varepsilon}\omega]_{\frac{5}{3},E}\,.
$$

□

5.2 Eine Abschätzung für harmonische Funktionen

Im Mittelpunkt dieses Abschnittes steht eine Ungleichung für L^p-Mittelwerte von harmonischen Funktionen, die auf einer Kugel $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind.

Lemma 5.4 *Sei $H \in L^p(B,\mathcal{H})$, $p \ge 1$, eine harmonische Funktion mit Werten in einem endlich-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $H(x_0) = 0$. Dann gilt für $0 < \sigma \le 1$*

$$
\left(\fint_{\sigma B} |H(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \;\le\; 4^{n+1}\,\sigma \left(\fint_B |H(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} . \tag{5.11}
$$

Für den Beweis benötigt man grundlegende Ergebnisse aus der Theorie der Kugelfunktionen, die kurz zusammengestellt werden, vergleiche [Mü] S.2-5 und [St].

Definition 5.5 *Sei $x \in I\!R^n$, $\xi = \frac{x}{|x|} \in \mathbf{S}^{n-1}$ und $H_k(x)$ ein homogenes Polynom vom Grad k mit Koeffizienten a_α, das heißt*

$$H_k(x) \;=\; \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha \,, \qquad H_k(tx) \;=\; t^k H_k(x)\,, \quad t>0\,.$$

Für harmonische Polynome, das heißt $\Delta H_k(x) = 0$, werden die Kugelfunktionen S_k (auch sphärisch harmonische Funktionen genannt) durch

$$S_k(\xi) \;:=\; \frac{1}{|x|^k} H_k(x) \;=\; H_k(\xi) \tag{5.12}$$

definiert.

Lemma 5.6 *Die Anzahl der linear unabhängigen Kugelfunktionen vom Grad k ist eine feste Zahl $N(n,k)$, für die zum Beispiel die Darstellung*

$$\frac{1+x}{(1-x)^{n-1}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} N(n,k)\, x^k$$

gilt.

Diese endliche Anzahl linear unabhängiger Funktionen läßt sich im Hilbertraum $L^2(\mathbf{S}^{n-1})$ orthogonalisieren.

Lemma 5.7 *Es existiert eine Familie $\{S_{kl}\}_{l=1,2,\dots,N(n,k)}$ von Kugelfunktionen vom Grad k mit*

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} S_{kj}(\xi)\, S_{ki}(\xi)\, d\xi \;=\; \delta_{ij}\,, \quad i,j = 1,2,\dots,N(n,k)\,.$$

Für zwei Kugelfunktionen von verschiedenem Grad m und k gilt

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} S_k(\xi)\, S_m(\xi)\, d\xi \;=\; 0\,.$$

Die Ergebnisse lassen sich zu nachfolgender Aussage zusammenfassen.

Satz 5.8 *In $L^2(B(0,1))$ existiert eine orthogonale Basis harmonischer Polynome, die sich mit (5.12) darstellen lassen als*

$$H_{kj}(x) \;=\; |x|^k\, S_{kj}(\xi)\,. \tag{5.13}$$

Speziell gilt für zwei verschiedene Polynome H_{ki} und H_{mj}, $k,m = 1,2,\dots$, $i,j = 1,2,\dots,N(n,k)$,

$$\int\limits_{B(0,\sigma)} H_{ki}(x)\, H_{mj}(x)\, dx \;=\; 0\,, \qquad 0 < \sigma \le 1\,.$$

Mit diesem Satz kann Lemma 5.4 bewiesen werden.

Beweis. Ohne Einschränkung kann $x_0 = 0$ und $r = 1$ gewählt werden.

Sei zunächst der Fall $p = 2$ betrachtet. Nach Satz 5.8 existiert in $L^2(B)$ eine orthogonale Basis harmonischer Polynome H_{kj} mit Darstellung (5.13), das heißt

$$H(x) \;=\; \sum_{k=0}^{N(n,k)} \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj} H_{kj}(x) \tag{5.14}$$

mit den Fourier-Koeffizienten $c_{kj} = (H, H_{kj})$.

Eine Rechnung in Polarkoordinaten, das heißt $x = \rho s$, $dx = \rho^{n-1} d\rho ds$ (ρ ist die Radiuskoordinate, $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathbf{S}^{n-1}$ die Winkelkoordinate und ds das $(n-1)$-dimensionale Flächenelement der Einheitssphäre), ergibt mit (5.12)

$$\begin{aligned} ⨍_B |H_{kj}(x)|^2 \, dx \;&=\; \frac{1}{|B|} \int_B |H_{kj}(\rho s)|^2 \rho^{n-1} d\rho ds \\ &=\; \frac{1}{|B|} \int_{S^{n-1}} \int_0^1 |\rho s|^{2k} |S_{kj}(s)|^2 \rho^{n-1} d\rho ds\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Mit der Substitution $\tilde{\rho} = \sigma\rho$, $d\rho = \frac{d\tilde{\rho}}{\sigma}$ und mit $\sigma^n |B| = |\sigma B|$ wird (5.15) zu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|B|} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\sigma} |s|^{2k} |S_{kj}(s)|^2 \left(\frac{\tilde{\rho}}{\sigma}\right)^{2k+n-1} \frac{1}{\sigma} \, d\tilde{\rho} ds \\ &= \frac{1}{\sigma^n |B|} \int_{S^{n-1}} \int_0^1 |\tilde{\rho} s|^{2k} |S_{kj}(s)|^2 \, \frac{\tilde{\rho}^{n-1}}{\sigma^{2k}} \, d\tilde{\rho} ds\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Durch die Rückkehr zu kartesischen Koordinaten ergeben (5.15) und (5.16) die Gleichung

$$⨍_{\sigma B} |H_{kj}(x)|^2 \, dx \;=\; \sigma^{2k} ⨍_B |H_{kj}(x)|^2 \, dx\,.$$

Da $H(x_0) = 0$, beginnt die Fourierentwicklung (5.14) mit $k = 1$. Daher kann man mit $\sigma^{2k} \leq \sigma^2$ auf

$$\left(⨍_{\sigma B} |H(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \sigma \left(⨍_B |H(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.17}$$

schließen, woraus die Behauptung (5.11) für $p = 2$ folgt.

Für beliebige $p \geq 1$ kann die Behauptung aus Ungleichung (5.17) abgeleitet werden. Dazu müssen zwei Fälle unterschieden werden.

<u>1.Fall:</u> $\quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{4}$

Sei $\tilde{x} \in \overline{\sigma B} \subset B$ der Punkt, an dem die subharmonische Funktion $|H|$ ihr Maximum auf der kompakten Menge $\overline{\sigma B}$ annimmt. Dann ist

$$\left(\fint_{\sigma B} |H(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{x \in \sigma B} |H(x)| = |H(\tilde{x})| \,. \tag{5.18}$$

Mit der Mittelwertungleichung für subharmonische Funktionen und $\tilde{B} = B(\tilde{x}, \sigma r)$ $\subset B(0, 2\sigma r)$ sowie der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |H(\tilde{x})| &\le \fint_{\tilde{B}} |H(x)| \, dx \le \frac{2^n}{2^n |\tilde{B}|} \int_{2\sigma B} |H(x)| \, dx \\ &= 2^n \fint_{2\sigma B} |H(x)| \, dx \le 2^n \left(\fint_{2\sigma B} |H(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \tag{5.19}$$

Mit (5.17) und der gleichen Argumentation wie bei (5.18) kann weiter abgeschätzt werden,

$$\begin{aligned} 2^n \left(\fint_{4\sigma \frac{1}{2} B} |H(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} &\le 2^n \, 4\sigma \left(\fint_{\frac{1}{2} B} |H(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le 2^{n+2} \sigma \sup_{x \in \frac{1}{2} B} |H(x)| \le 2^{2n+2} \sigma \fint_B |H(x)| \, dx \,. \end{aligned}$$

Wendet man darauf die Höldersche Ungleichung (1.2) an, ergibt sich aus (5.18) und (5.19) die Behauptung

$$\left(\fint_{\sigma B} |H(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \le 4^{n+1} \, \sigma \left(\fint_B |H(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

<u>2.Fall:</u> $\frac{1}{4} < \sigma \le 1$

In diesem Fall ist

$$\left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{n}{p}+1} \le 4^{\frac{n}{p}+1} \le 4^{n+1} \text{ beziehungsweise } \quad \sigma^{-\frac{n}{p}} \le 4^{n+1} \sigma \,.$$

Damit ergibt sich die Behauptung (5.11) direkt aus

$$\left(\frac{1}{|\sigma B|} \int_{\sigma B} |H(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \sigma^{-\frac{n}{p}} \left(\fint_B |H(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le 4^{n+1} \sigma \left(\fint_B |H(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

$\square$

6 Maximalfunktionen und inverse Hölder-Ungleichung

6.1 Maximalfunktionen

Für den Nachweis der Stabilitätseigenschaft des Kerns der Hodge-Operatoren in Kapitel 7 werden Abschätzungen der L^p-Norm der Maximalfunktion beziehungsweise der scharfen Maximalfunktion benötigt. Dazu nutzt man Ergebnisse der Hardy-Littlewood-Theorie für Maximalfunktionen, vergleiche [FS].

Man kann zwischen globaler (Urbildraum ist ganz $\mathbb{R}^n$) und lokaler (auf konvexe, beschränkte Gebiete eingeschränkt) Maximalfunktion unterscheiden.

Definition 6.1 *Sei $B(x,r)$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}$ ein endlich-dimensionaler Hilbertraum und $f \in L^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, $1 \leq s < \infty$. Man nennt*

$$M_s f(x) \;:=\; \sup_{r>0} \left(\;\; \fint_{B(x,r)} |f(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \tag{6.1}$$

(globale) Hardy-Littlewood-Maximalfunktion und

$$M_s^{\#} f(x) \;:=\; \sup_{r>0} \left(\;\; \fint_{B(x,r)} \left| f(y) - \fint_{B(x,r)} f(z)\, dz \right|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \tag{6.2}$$

scharfe Maximalfunktion.

Bemerkungen. (i) In einigen Arbeiten, zum Beispiel [BI], [I2] und [FS], werden in der Definition der (lokalen) Maximalfunktion beziehungsweise der scharfen Maximalfunktion die Kugeln um x durch Würfel Q ersetzt, die x enthalten. Ist Q_0 ein beliebiger Würfel in $\mathbb{R}^n$, dann wird für $f \in L^s(Q_0)$ definiert

$$\hat{M}_s f(x) \;:=\; \sup_{Q} \left(\fint_Q |f(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \quad x \in Q \subset Q_0\,. \tag{6.3}$$

(ii) Ist $B = B(x,r) \subset Q$, so existiert ein $C = C(n) > 0$ mit $|B| \geq C|Q|$. Folglich ist

$$M_s f(x) \;=\; \sup_{r>0} \left(\fint_B |f(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \;\leq\; \sup_Q \left(\frac{1}{C} \fint_Q |f(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \;\leq\; \frac{1}{C}\, \hat{M}_s f(x)\,. \tag{6.4}$$

Analog existiert ein $\tilde{C}(n) > 0$ mit $\hat{M}_s f(x) \leq \tilde{C}^{-1}(n)\, M_s f(x)$. Damit sind Abschätzungen für $\hat{M}_s f$ auf (lokales) $M_s f$ übertragbar.

(iii) In engem Zusammenhang mit der scharfen Maximalfunktion stehen die Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation (BMO), die (siehe [FS]) als lokal integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind, für die $\sup_Q \fint_Q |f(y) - f_Q|dy = \|f\|_{\#} < \infty$ gilt. Die Klasse der BMO-Funktionen mit der Norm $\|.\|_{\#}$ bildet einen Banachraum.

(iv) Mit Satz 1.7 und mit (1.3) folgt aus der Definition der Maximalfunktion (6.1)

$$f(x) \;\leq\; Mf(x) \;\leq\; M_s f(x) \tag{6.5}$$

fast überall.

In Anlehnung an [BI] und [I2] wird zunächst die durch (6.3) definierte Maximalfunktion $\hat{M}_s f$ benutzt. Damit lassen sich bekannte Techniken anwenden, wie zum Beispiel Zerlegungen in dyadische Würfel, Überdeckungssätze vom Vitali-Typ und die Calderón-Zygmund-Zerlegung, vergleiche [St] und [I2].

Im weiteren sei Q_0 ein beliebiger Würfel in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 6.2 *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von offenen Würfeln in $\mathbb{R}^n$. Die Vereinigung $\bigcup\limits_{Q\in\mathcal{F}} Q \subset \mathbb{R}^n$ aller Würfel aus $\mathcal{F}$ sei beschränkt und mit $\bigcup\mathcal{F}$ bezeichnet. Dann existiert für jedes $\lambda > 3$ eine disjunkte Teilfamilie $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, so daß $\mathcal{F}$ eine Verfeinerung von $\lambda\mathcal{F}' = \{\lambda Q' \,:\, Q' \in \mathcal{F}'\}$ ist. Das bedeutet, daß es für alle $Q \in \mathcal{F}$ ein $Q' \in \mathcal{F}'$ gibt, so daß $Q \subset \lambda Q'$ gilt. Folglich ist*

$$\bigcup\mathcal{F} \subset \bigcup\lambda\mathcal{F}' \quad \textit{und} \quad |\bigcup\mathcal{F}| \;\leq\; \lambda^n \sum_{Q'\in\mathcal{F}'} |Q'|\,.$$

Aus diesem Überdeckungslemma vom Vitali-Typ läßt sich das folgende für die weiteren Betrachtungen grundlegende Lemma ableiten.

Lemma 6.3 *Sei $f \in L^p(Q_0)$, $1 \leq s < \infty$, dann gilt für alle $t > 0$, $0 \leq \sigma < 1$*

$$\Big|\{x \in Q_0 \,:\, \hat{M}_p f(x) > t\}\Big| \;\leq\; \frac{3^n}{(1-\sigma)^p t^p} \int\limits_{|f(y)|>\sigma t} |f(y)|^p\, dy\,. \tag{6.6}$$

Lemma 6.4 (Calderón-Zygmund-Zerlegung)
Sei $f \in L^p(Q_0)$, $1 \le p < \infty$ und $t \ge (⨍_{Q_0} |f|^p)^{1/p}$ fest. Dann existiert eine disjunkte Familie $\mathcal{F}$ von Würfeln $Q \subset Q_0$, so daß

$$t^p \;<\; ⨍_Q |f(x)|^p dx \;\le\; 2^n t^p \qquad \textit{für alle} \quad Q \in \mathcal{F} \tag{6.7}$$

und

$$|f(x)| \;\le\; t \qquad \textit{für fast alle} \quad x \in Q_0 \setminus \bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q\,. \tag{6.8}$$

Die Beweise von Lemma 6.3 und Lemma 6.4 finden sich zum Beispiel in [BI].

Lemma 6.5 *Sei $f \in L^p(Q_0)$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt*

$$\Big|\{x \in Q_0 \,:\, \hat{M}_p f(x) > t\}\Big| \;\ge\; \frac{1}{2^n t^p} \int\limits_{|f(y)|>t} |f(y)|^p dy \tag{6.9}$$

für alle $t \ge (⨍_{Q_0} |f(y)|^p dy)^{1/p}$.

Beweis. Sei $F := \{x \in Q_0 \,:\, \hat{M}_p f(x) > t\}$ und $\mathcal{F}$ die Calderon-Zygmund-Familie zum Parameter $t \ge (⨍_{Q_0} |f(y)|^p dy)^{1/p}$ aus Lemma 6.4. Bis auf Mengen vom Maß Null gilt die Inklusion

$$\{x \,:\, |f(x)| > t\} \;\subset\; \bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q \;\subset\; F\,. \tag{6.10}$$

Aus $x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q$ folgt, daß ein Würfel $Q \in \mathcal{F}$ existiert mit $x \in Q$ und $t^p < ⨍_Q |f(y)|^p dy$. Damit ist nach (6.3) $\hat{M}_p f(x) > t$, folglich $x \in F$ und die zweite Inklusion in (6.10) ist gezeigt. Mit (6.7) und (6.8) gilt

$$\begin{aligned}|F| \;&\ge\; \sum_{Q\in\mathcal{F}} |Q| \;\ge \sum_{Q\in\mathcal{F}} \frac{1}{2^n t^p} \int_Q |f(y)|^p\,dy \;=\; \frac{1}{2^n t^p} \int\limits_{\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q} |f(y)|^p\,dy \\ &\ge\; \frac{1}{2^n t^p} \int\limits_{|f(y)|>t} |f(y)|^p\,dy\,.\end{aligned}$$

□

Lemma 6.6 *Für $h \in L^p(Q_0)$ und für die Verteilungsfunktion von $|h|$, definiert durch*

$$\lambda(t) \;:=\; |\{x \in Q_0 \,:\, |h(x)| > t\}| \quad , \quad t \ge 0\,,$$

gilt

$$\int_{Q_0} |h(x)|^p \, dx \; = \; p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(t) \, dt \tag{6.11}$$

und

$$\int_{|h(x)|>t} |h(x)|^p dx \; = \; - \int_t^\infty \tau^{p-1} \frac{d}{d\tau} \left(\int_{|h(x)|>\tau} |h(x)| \, dx \right) d\tau \, . \tag{6.12}$$

Beweis. Mit dem Satz von Fubini folgt (6.11) aus

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(t) dt \; &= \; p \int_0^\infty t^{p-1} \left| \{ x \in Q_0 : |h(x)| > t \} \right| \, dt \; = \; p \int_0^\infty t^{p-1} \int_{|h(x)|>t} dx \, dt \\ &= \; p \int_{Q_0} \int_0^{|h(x)|} t^{p-1} dt \, dx = \int_{Q_0} |h(x)|^p \, dx \, . \end{aligned}$$

Da $h \in L^p(Q_0)$, gilt

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^{p-1} \int_{|h(x)|>\tau} |h(x)| \, dx \; \leq \; \lim_{\tau \to \infty} \int_{|h(x)|>\tau} |h(x)|^p \, dx \; = \; 0 \, .$$

Damit wird durch partielle Integration und mit dem Satz von Fubini die rechte Seite von (6.12) zu

$$\begin{aligned} & t^{p-1} \int_{|h(x)|>t} |h(x)| \, dx + \int_t^\infty \tau^{p-2} (p-1) \int_{|h(x)|>\tau} |h(x)| \, dx \, d\tau \\ = \; & t^{p-1} \int_{|h(x)|>t} |h(x)| \, dx + \int_{|h(x)|>t} \int_t^{|h(x)|} \tau^{p-2} (p-1) \, |h(x)| \, d\tau \, dx \\ = \; & t^{p-1} \int_{|h(x)|>t} |h(x)| dx + \int_{|h(x)|>t} |h(x)| \, |h(x)|^{p-1} \, dx \\ & - \int_{|h(x)|>t} |h(x)| \, t^{p-1} \, dx \; = \; \int_{|h(x)|>t} |h(x)|^p \, dx \, . \end{aligned}$$

□

Es werden die Maximalungleichung von Hardy und Littlewood sowie deren Umkehrung bewiesen.

Satz 6.7 *Sei $f \in L^p(Q_0)$, $1 < p < \infty$. Dann ist $\hat{M}f = \hat{M}_1 f \in L^p(Q_0)$ und es gilt*

$$\int_{Q_0} |\hat{M}f(x)|^p\,dx \;\le\; \frac{3^{n+1}p^2}{p-1}\int_{Q_0} |f(x)|^p\,dx\,. \tag{6.13}$$

Beweis. Die Abschätzung (6.6) aus Lemma 6.3 für die Verteilungsfunktion von $\hat{M}f$ lautet

$$\lambda(t) \;=\; \Big|\{x \in Q_0 \,:\, \hat{M}f(x) > t\}\Big| \;\le\; \frac{3^n}{(1-\sigma)t} \int\limits_{|f(y)|>\sigma t} |f(y)|\,dy \quad \sigma \in [0,1)\,. \tag{6.14}$$

Wendet man (6.11) aus Lemma 6.6 auf die Maximalfunktion $\hat{M}f$ an, ergibt sich aus (6.14) mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_0} |\hat{M}f(x)|^p\,dx \;&=\; p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\lambda(t)\,dt \;\le\; \frac{3^n p}{1-\sigma}\int\limits_0^\infty t^{p-2}\int\limits_{|f(x)|>\sigma t} |f(x)|\,dx\,dt \\
&=\; \frac{3^n p}{1-\sigma}\int\limits_{Q_0} |f(x)| \int\limits_0^{|f(x)|/\sigma} t^{p-2}\,dt\,dx \\
&=\; \frac{3^n p}{(1-\sigma)\sigma^{p-1}(p-1)}\int\limits_{Q_0} |f(x)|^p\,dx\,.
\end{aligned}$$

Der Vorfaktor des letzten Ausdrucks soll für $0 \le \sigma < 1$ minimiert werden. Dazu muß das Reziproke maximal werden. Sei $g(\sigma) = \frac{p-1}{3^n p}(1-\sigma)\sigma^{p-1}$. Dann ist

$$g'(\sigma) \;=\; \frac{p-1}{3^n\,p}\Big((p-1)\,\sigma^{p-1} - p\,\sigma^{p-1}\Big)\,. \tag{6.15}$$

Die Nullstelle der Ableitung (6.15) ist $\sigma = 1 - 1/p$, bei der g ein Maximum hat. Mit dem gefundenen Wert für σ wird der Vorfaktor mit elementaren analytischen Methoden abgeschätzt,

$$\begin{aligned}
\frac{3^n p}{(1-\sigma)\sigma^{p-1}(p-1)} \;&=\; \frac{3^n p^2}{p-1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \;=\; \frac{3^n p^2}{p-1}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^{p-1} \\
&\le\; \frac{3^n p^2 e}{p-1} \;<\; \frac{3^{n+1}p^2}{p-1}\,.
\end{aligned}$$

□

Satz 6.8 *Sei $f \in L^p(Q_0)$, $p \ge 1$. Dann ist*

$$⨍_{Q_0} |f(x)|^p\,dx \;\le\; \left(⨍_{Q_0} |f(x)|\,dx\right)^p + \frac{2^n(p-1)}{p} ⨍_{Q_0} |\hat{M}f(x)|^p\,dx\,. \tag{6.16}$$

Beweis. Sei $a = \fint_{Q_0} |f(x)| dx$ der Mittelwert von f über Q_0. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_0} |f(x)|^p \, dx \;&\leq\; \int\limits_{|f(x)|\leq a} |f(x)|^p \, dx \;+\; \int\limits_{|f(x)|>a} |f(x)|^p \, dx \\
&\leq\; \int\limits_{|f(x)|>a} |f(x)|^p \, dx \;+\; a^{p-1} \int\limits_{|f(x)|\leq a} |f(x)| dx \, . \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration und mit (6.12) wird der erste Term der rechten Seite von (6.17) zu

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|f(x)|>a} |f(x)|^p \, dx \;&=\; -\int\limits_a^\infty \tau^{p-1} \frac{d}{d\tau} \left(\int\limits_{|f(x)|>\tau} |f(x)| \, dx \right) d\tau \\
&=\; a^{p-1} \int\limits_{|f(x)|>a} |f(x)| \, dx + (p-1) \int\limits_a^\infty \tau^{p-2} \int\limits_{|f(x)|>\tau} |f(x)| \, dx \, d\tau \, .
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\tau \geq a$, der Abschätzung (6.9) in Lemma 6.5 (mit p=1) und (6.11), angewandt auf die Funktion $h(x) = \hat{M}f(x)$ für $\hat{M}f(x) > a$ und null sonst, folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^\infty \tau^{p-2} \left(\int\limits_{|f(x)|>\tau} |f(x)| \, dx \right) d\tau \;&\leq\; 2^n \int\limits_a^\infty \tau^{p-1} \left| \{ x \in Q_0 : \hat{M}f(x) > \tau \} \right| d\tau \\
&=\; \frac{2^n}{p} \int\limits_{\hat{M}f(x)>a} |\hat{M}f(x)|^p \, dx \;\leq\; \frac{2^n}{p} \int\limits_{Q_0} |\hat{M}f(x)|^p \, dx \, .
\end{aligned}$$

Mit (6.17) ergibt sich

$$\int\limits_{Q_0} |f(x)|^p \, dx \;\leq\; a^{p-1} \int\limits_{Q_0} |f(x)| \, dx \;+\; \frac{2^n(p-1)}{p} \int\limits_{Q_0} |\hat{M}f(x)|^p \, dx \, ,$$

woraus direkt die Behauptung folgt.

$\square$

Korollar 6.9 *Sei $f \in L^p(Q_0)$, $p > s \geq 1$. Dann gilt*

$$\fint_{Q_0} |f(x)|^p \, dx \;\leq\; \left(\fint_{Q_0} |f(x)|^s dx \right)^{\frac{p}{s}} \;+\; \frac{2^n(p-s)}{p} \fint_{Q_0} |\hat{M}_s f(x)|^p \, dx \qquad (6.18)$$

und

$$\int_{Q_0} |\hat{M}_s f(x)|^p \, dx \;\leq\; \frac{3^{n+1}\, p^2}{s\,(p-s)} \int_{Q_0} |f(x)|^p \, dx \, . \qquad (6.19)$$

Beweis. Nach Definition ist $\hat{M}(|f|^s) = |\hat{M}_s f|^s$. Wendet man (6.13) und (6.16) auf die Funktion $|f|^s \in L^{\frac{p}{s}}(Q_0)$ an und ersetzt den Exponenten p durch $\frac{p}{s}$, folgt (6.18) aus

$$\begin{aligned} ⨍_{Q_0} |f(x)|^{s\frac{p}{s}}\, dx &\le \left(⨍_{Q_0} |f(x)|^s\, dx\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{2^n(\frac{p}{s}-1)}{\frac{p}{s}} ⨍_{Q_0} |\hat{M}(|f|^s)(x)|^{\frac{p}{s}}\, dx \\ &= \left(⨍_{Q_0} |f(x)|^s\, dx\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{2^n(p-s)}{p} ⨍_{Q_0} |\hat{M}_s f(x)|^p\, dx\,. \end{aligned}$$

Und (6.19) folgt aus

$$\int_{Q_0} |M_s f(x)|^{s\frac{p}{s}} dx \le \frac{3^{n+1}(\frac{p}{s})^2}{\frac{p}{s}-1} \int_{Q_0} |f(x)|^{s\frac{p}{s}}\, dx = \frac{3^{n+1}p^2}{s(p-s)} \int_{Q_0} |f(x)|^p\, dx\,.$$

□

Die folgende Aussage wird im Abschnitt 6.2 über inverse Hölder-Ungleichungen angewandt.

Korollar 6.10 *Sei $f \in L^s(Q_0)$, $s > 1$. Man nehme an, es gelte die punktweise Abschätzung*

$$\hat{M}_s f(x) \le C\, \hat{M} f(x)\,,$$

mit einer Konstanten C unabhängig von $x \in Q_0$. Für ein p mit

$$s < p \le s + \frac{s-1}{6^{n+1} s\, C^{s+1}} \le s+1$$

ist

$$\left(⨍_{Q_0} |\hat{M} f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{3^{n+2}\, p^2}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(⨍_{Q_0} |f(x)|^s\, dx\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{6.20}$$

wenn zusätzlich $f \in L^p(Q_0)$.

Beweis. Kombiniert man Satz 6.7 mit (6.18), erhält man

$$⨍_{Q_0} |\hat{M} f(x)|^p\, dx \le \frac{3^{n+1}\, p^2}{p-1} \left(⨍_{Q_0} |f(x)|^s\, dx\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{3 \cdot 6^n\, p\,(p-s)}{p-1} ⨍_{Q_0} |\hat{M}_s f(x)|^p\, dx\,,$$

was sich mit den Voraussetzungen und mit $\frac{p}{p-1} \le \frac{s}{s-1}$ weiter abschätzen läßt zu

$$⨍_{Q_0} |\hat{M} f(x)|^p dx \le \frac{3^{n+1}\, p^2}{p-1} \left(⨍_{Q_0} |f(x)|^s dx\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{3 \cdot 6^n\, s\,(p-s)}{s-1} C^{s+1} ⨍_{Q_0} |\hat{M} f(x)|^p dx\,.$$

Es gilt

$$p - s \;\leq\; \frac{s-1}{6^{n+1}\, C^{s+1}\, s} \quad \text{beziehungsweise} \quad 6^{n+1} s\,(p-s)\, C^{s+1} \;\leq\; s-1\,.$$

Damit ist der Faktor $\frac{3\cdot 6^n\, s\,(p-s)}{s-1}\, C^{s+1}$ kleiner als $\frac{1}{2}$. Folglich gilt

$$⨍_{Q_0} |\hat{M} f(x)|^p\, dx \;\leq\; \frac{2\cdot 3^{n+1}\, p^2}{p-1} \left(⨍_{Q_0} |f(x)|^s\, dx \right)^{\frac{p}{s}}.$$

□

Die für $f \in L^1(Q_0)$ durch

$$f^{\#}(x) \;:=\; \sup_Q \frac{1}{|Q|^2} \int\limits_{Q\times Q} |f(y) - f(z)|\, dy\, dz\,, \quad x \in Q \subset Q_0\,,$$

definierte Funktion $f^{\#}$ (vergleiche [W]) läßt sich gegen die scharfe Maximalfunktion $\hat{M}^{\#} f$ abschätzen.

Lemma 6.11 *Für $f \in L^1(Q_0)$ gilt*

$$\hat{M}^{\#} f(x) \;\leq\; f^{\#}(x) \;\leq\; 2\,\hat{M}^{\#} f(x)\,.$$

Beweis. Nimmt man das Supremum in

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \;&=\; \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \left| \int_Q (f(x) - f(y))\, dy \right| dx \\ &\leq\; \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)|\, dx dy\,, \end{aligned}$$

folgt die erste Ungleichung. Der zweite Teil ergibt sich mit der Dreiecksungleichung durch Bildung des Supremums in

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)|\, dx dy \;&\leq\; \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx dy \\ + \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(y) - f_Q|\, dx dy \;&=\; \frac{2}{|Q|^2} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx\,. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz schätzt die L^p-Norm der Maximalfunktion gegen die L^p-Norm von $f^{\#}$ ab. Der Beweis ist technisch sehr aufwendig (siehe [W]), nutzt aber ähnliche Methoden (zum Beispiel Überdeckungssätze) wie im Beweis der Hardy-Littlewood-Ungleichung (6.13).

Satz 6.12 *Sei $f \in L^p(Q_0)$, $p \geq 1$. Dann existiert eine Konstante $C(n)$, so daß*

$$\left(\int_{Q_0} |\hat{M}f(x) - f_{Q_0}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n)\, p \left(\int_{Q_0} |f^{\#}(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} . \tag{6.21}$$

Damit läßt sich der Satz über (globale) Maximalfunktionen formulieren.

Satz 6.13 *Für $f \in L^p(I\!\!R^n, \mathcal{H})$, $p > s \geq 1$, gelten folgende drei Ungleichungen*

$$\|f\|_p^p \leq C(n)\, \frac{p-s}{p}\, \|M_s f\|_p^p , \tag{6.22}$$

$$\|M_s f\|_p^p \leq C(n)\, \frac{p^2}{s(p-s)}\, \|f\|_p^p , \tag{6.23}$$

$$\|M_s f\|_p \leq C(n)\, p\, \|M_s^{\#} f\|_p , \tag{6.24}$$

mit der nur von der Dimension abhängigen Konstanten $C(n)$,

Beweis. Multipliziert man (6.18) mit $|Q_0|$, ergibt sich

$$\int_{Q_0} |f(x)|^p \, dx \leq \frac{1}{|Q_0|^{\frac{p}{s}-1}} \left(\int_{Q_0} |f(x)|^s\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{2^n(p-s)}{p} \int_{Q_0} |\hat{M}_s f(x)|^p \, dx . \tag{6.25}$$

Wählt man eine Familie $(Q_k)_{k \in I\!\!N}$ von Würfeln in $I\!\!R^n$ mit $Q_k \subset Q_{k+1}$ und $\bigcup_k Q_k = \lim_{k \to \infty} Q_k = I\!\!R^n$, wird aus (6.25) unter Berücksichtigung des Lebesgueschen Satzes über monotone Konvergenz [Mun] und der Tatsache, daß die lokale Maximalfunktion nicht größer als die globale sein kann,

$$\begin{aligned} \int_{I\!\!R^n} |f(x)|^p \, dx \leq\; & \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|Q_k|^{\frac{p}{s}-1}} \left(\int_{Q_k} |f(x)|^s dx\right)^{\frac{p}{s}} \\ & + C_1(n)\, \frac{p-s}{p} \int_{I\!\!R^n} |\hat{M}_s f(x)|^p \, dx . \end{aligned} \tag{6.26}$$

Da $f \in L^p(I\!\!R^n, \mathcal{H})$, ist $\int_{Q_k} |f(x)|^s dx$ unabhängig von k beschränkt. Außerdem ist $(|Q_k|^{1-\frac{p}{s}})_{k \in I\!\!N}$ wegen $p > s$ eine Nullfolge. Damit ist der erste Summand in (6.26) identisch null und da Abschätzungen für $\hat{M}_s f$ auf $M_s f$ übertragbar sind (6.4), folgt (6.22). Analog ergibt sich aus (6.19) die Behauptung (6.23).

Die gleiche Argumentation mit der Familie $(Q_k)_{k \in I\!\!N}$, wobei die Folge $(f_{Q_k})_{k \in I\!\!N}$ gegen null konvergiert, bringt den Übergang von (6.21) zur globalen Abschätzung

$$\|\hat{M}f\|_p \leq C_2(n)\, p\, \|f^{\#}\|_p . \tag{6.27}$$

Die Anwendung von (6.27) auf $|f|^s \in L^{\frac{p}{s}}$ und auf den Exponenten $p/s < p$ ergibt unter Berücksichtigung von $\hat{M}(|f - f_Q|^s) = |\hat{M}_s(f - f_Q)|^s = |\hat{M}_s^{\#} f|^s$ und Lemma 6.11

$$\|\hat{M}_s f\|_p^s \;\leq\; C_3(n)\,\frac{p}{s}\,\|\hat{M}_s^{\#} f\|_p^s \;\leq\; C_3(n)\,p\,\|\hat{M}_s^{\#} f\|_p^s\,.$$

Daraus folgt wieder mit (6.4) und $1/s \leq 1$ die Behauptung (6.24).

$\square$

6.2 Inverse Hölder-Ungleichung

Definition 6.14 *Sei Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F}(x)$ die Familie der Kugeln $B = B(x,r) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Man sagt, daß eine meßbare Funktion f auf Ω die inverse Hölder-Ungleichung für positive $q < s$ erfüllt, wenn*

$$\|f\|_{s,B} \quad \leq \quad A_s\,\|f\|_{q,B} \tag{6.28}$$

für alle Kugeln $B \in \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{F}(x)$ mit der von B unabhängigen Konstanten A_s.

Bemerkungen. (i) Man kann in Definition 6.14 die Kugeln B durch beliebige beschränkte, konvexe Mengen in $\mathbb{R}^n$ ersetzen.
(ii) Im Grenzfall $q \to -\infty$ und $s \to \infty$ wird (6.28) zur klassischen Harnackschen Ungleichung

$$\sup_{y\in B} |f(y)| \;\leq\; A\,\inf_{y\in B} |f(y)|\,.$$

Die inverse Hölder-Ungleichung hat die Eigenschaft, daß sie sich "selbst verbessert", das heißt, sie impliziert eine höhere Integrabilität. Diese Aussage hat ihren Ursprung in dem Lemma von Gehring [G], das hier in einer modifizierten Form wiedergegeben wird.

Satz 6.15 *Sei Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, $0 < q < s$ und $f \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ erfülle die inverse Hölder-Ungleichung für alle Kugeln $B \subset \Omega$ der Form*

$$\left(⨍_B |f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}} \quad \leq \quad A_s\,\left(⨍_B |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

mit einer von B unabhängigen Konstanten A_s. Dann existiert ein Exponent $p = p(n,s,A_s)$ größer als s und eine Konstante $C = C(n,s,A_s)$, so daß $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\left(⨍_B |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad C\,\left(⨍_B |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

für alle Kugeln $B \subset \Omega$.

Unter den gleichen Voraussetzungen wie im vorangegangenen Lemma sagt man, daß f die schwache inverse Hölder-Ungleichung erfüllt, wenn

$$\left(\fint_{\sigma B} |f(x)|^s\, dx\right)^{\frac{1}{s}} \quad \leq \quad A_s \left(\fint_B |f(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \sigma \in (0,1], \tag{6.29}$$

für alle $B \subset \Omega$.

Um die analoge Aussage zu Satz 6.15 für Funktionen, die der schwachen inversen Hölder-Ungleichung genügen (Satz 6.19), zu beweisen, benötigt man die folgenden Hilfsmittel.

Lemma 6.16 *Sei $B_0 = B_0(x_0, r)$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Für $f \in L^s(B_0)$, $1 < s < \infty$, sei eine Regularisierungsfunktion f_t definiert durch*

$$f_t\,(x) \;:=\; \fint_{B_0} f(x - tx + ty)\, dy \quad , \quad 0 \leq t \leq 1\,.$$

Es gelten folgende Aussagen:

(i) $\quad f_t \in L^\infty(B_0)$ *für* $0 < t \leq 1$ *und*

$$\|f_t\|_\infty \;\leq\; t^{-n} \fint_{B_0} |f(z)|\, dz\,, \tag{6.30}$$

(ii) $\quad \|f_t\|_{s,B_0} \;\leq\; (1-t)^{-\frac{n}{s}} \|f\|_{s,B_0}$ *und*

(iii) $\quad \lim\limits_{t\to 0} f_t \;=\; f$ *in $L^s(B_0)$ beziehungsweise* $\liminf\limits_{t\to 0} f_t \;=\; f$ *fast überall.*

Beweis. Ohne Einschränkung kann man für B_0 die Einheitskugel $B(0,1)$ wählen. Die Kugeln $B(x-tx, t)$ und $B(yt, 1-t)$ sind in B_0 für $x, y \in B_0$, $0 < t \leq 1$, enthalten.

(i) Mit der Substitution $z = x - tx + ty$, $dy = t^{-n}dz$, und $|tB| = t^n|B|$ folgt

$$\begin{aligned}
\|f_t\|_\infty \;&=\; \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B_0} |f_t(x)| \;=\; \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B_0} \left|\fint_{B_0} f(x - tx + ty)\, dy\right| \\
&=\; \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B_0} \frac{1}{|B_0|}\left|\int\limits_{B(x-tx,t)} f(z)\, t^{-n}\, dz\right| \;\leq\; t^{-n} \fint\limits_{B_0} |f(z)|\, dz\,.
\end{aligned}$$

(ii) Mit der Minkowski-Ungleichung für Integrale (1.5) und der Substitution $z = x - tx + ty$, $dx = (1-t)^{-n}dz$, gilt

$$\|f_t\|_{s,B_0} \;=\; \left(\int\limits_{B_0} \left|\fint\limits_{B_0} f(x - tx + ty)\, dy\right|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \fint_{B_0} \left(\int_{B_0} |f(x - tx + ty)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} dy \\
&= \fint_{B_0} \left(\int_{B(ty,1-t)} |f(z)|^s (1-t)^{-n} dz \right)^{\frac{1}{s}} dy \\
&\leq \left(\int_{B_0} |f(z)|^s (1-t)^{-n} dz \right)^{\frac{1}{s}} \;=\; (1-t)^{-\frac{n}{s}} \|f\|_{s,B_0}\,.
\end{aligned}
$$

(iii) Mit der gleichen Substitution wie in (i) und der Minkowski-Ungleichung für Integrale erhält man

$$
\lim_{t\to 0} \left(\int_{B_0} \left| f(x) - \fint_{B_0} f(x - tx + ty)\, dy \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \lim_{t\to 0} \int_{B_0} \left(\fint_{B(x-tx,t)} |f(x) - f(z)|^s dz \right)^{\frac{1}{s}} dx.
$$

Nach Korollar 1.9 konvergiert das innere Integral $\left(\fint_{B_t} |f(z) - f(x)|^s dz\right)^{\frac{1}{s}} \in L^1(B_0)$ gegen 0 fast überall, weil alle $B_t = B(x - tx, t)$ nach Definition 1.8 K-regulär sind. Folglich ist der Lebesguesche Konvergenzsatz [Mun] anwendbar, das heißt, Integration und Grenzwertbildung sind vertauschbar und damit

$$
\int_{B_0} \lim_{t\to 0} \left(\fint_{B(x-tx,t)} |f(x) - f(z)|^s dz \right)^{\frac{1}{s}} dx \quad = \quad 0\,.
$$

Aus der L^s-Konvergenz folgt, daß es eine Teilfolge $\{f_{t_k}\}_{k\in I\!\!N}$ gibt, die gegen f fast überall konvergiert (siehe [Mun] S.203). Das heißt insbesondere

$$
\liminf_{t\to 0} f_t \;=\; f \qquad \text{fast überall.}
$$

□

Lemma 6.17 *Sei B_0 eine Kugel in $I\!\!R^n$. Angenommen $f \in L^s(B_0)$ erfüllt die schwache inverse Hölder-Ungleichung (6.29) mit $q = 1$, dann gilt für die Regularisierungsfunktionen f_t ebenfalls (6.29) mit $q = 1$ für $t \neq 1$. Das heißt insbesondere, daß f durch beschränkte Funktionen, die (6.29) mit dem gleichen A_s erfüllen, in $L^p(B_0)$ approximiert werden kann.*

Beweis. Seien $t \in [0,1)$ und eine Kugel $B = B(a,r)$ fest vorgegeben. Mit der Minkowski-Ungleichung für Integrale folgt

$$\left(\fint_{\sigma B} |f_t(x)|^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\fint_{B(a,\sigma r)} \left| \fint_{B_0} f(x - tx + ty) \, dy \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}$$
$$\leq \fint_{B_0} \left(\fint_{B(a,\sigma r)} |f(x - tx + ty)|^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}} dy \,. \tag{6.31}$$

Mit der linearen Substitution $z = x - tx + ty$, $dx = (1-t)^{-n} dz$, dem Satz von Fubini und (6.29) läßt sich (6.31) umformen zu

$$\fint_{B_0} \left(\fint_{B\left(a-ta+ty,\,(1-t)\sigma r\right)} |f(z)|^s dz \right)^{\frac{1}{s}} dy \;\leq\; A_s \fint_{B_0} \fint_{B\left(a-ta+ty,\,(1-t)r\right)} |f(z)| \, dz \, dy$$
$$= \; A_s \fint_{B_0} \fint_{B(a,r)} |f(x - tx + ty)| \, dx \, dy \; = \; A_s \fint_{B} |f_t(x)| \, dx \,.$$

□

Im weiteren sei $B_0 \subset \Omega$ die Einheitskugel $B(0,1)$. Für $f \in L^s(B_0)$, das die schwache inverse Hölder-Ungleichung erfüllt, betrachte man die Hilfsfunktion

$$F(x) \;=\; \rho(x)\,|f(x)| + \left(\fint_{B_0} |f(y)|^s \, dy \right)^{\frac{1}{s}} , \quad \text{mit} \quad \rho(x) \;=\; (1 - |x|)^{n/s} \,.$$

Lemma 6.18 *Die Maximalfunktion M_sF für die Kugel $B_0 \subset \Omega$ erfüllt punktweise die Abschätzung*

$$M_sF(x) \;\leq\; C\, MF(x) \,, \quad \textit{mit} \quad C = C(n,\sigma,A_s) = 3^n A_s + \left(\frac{7}{\sigma}\right)^n ,$$

wobei $0 < \sigma \leq 1$ und mit A_s die Konstante aus (6.29) gemeint ist.

Beweis. Sei $x \in B_0$ fest. Man betrachte eine beliebige Kugel $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\sigma B \subset B_0$. Es ist zu zeigen, daß

$$\left(\fint_{\sigma B} |F(y)|^s \, dy \right)^{\frac{1}{s}} \;\leq\; C\, MF(x) \,, \qquad 0 < \sigma \leq 1 \,.$$

Dazu sind zwei Fälle zu untersuchen.

1.Fall: $|B| \geq \left(\frac{1-|x|}{2}\right)^n$

Für alle $y \in \sigma B$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\rho^s(y) = (1-|y|)^n \leq (1-|x|+|x-y|)^n \leq \left(2|B|^{1/n} + \sigma|B|^{1/n}\right)^n = \left(1+\frac{2}{\sigma}\right)^n |\sigma B|\,.$$

Daraus folgt mit $|B_0| < 2^n$

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{\sigma B} |F(y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}} &\leq \left(\fint_{\sigma B} \rho^s(y)|f(y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\fint_{B_0} |f(y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\frac{2}{\sigma}+1\right)^{\frac{n}{s}} \left(\int_{\sigma B} |f(x)|^s\, dx\right)^{\frac{1}{s}} + [f]_{B_0,s} \\
&\leq \left(\frac{2}{\sigma}+1\right)^{\frac{n}{s}} 2^{\frac{n}{s}} \left(\fint_{B_0} |f(x)|^s\, dx\right)^{\frac{1}{s}} + [f]_{B_0,s} \\
&\leq \frac{(2+1)^n\, 2^n + 1}{\sigma^n} [f]_{B_0,s} \\
&\leq \left(\frac{7}{\sigma}\right)^n [f]_{B_0,s} \;\leq\; C \left(\sup_r \int_B \rho(y)|f(y)|\, dy + [f]_{B_0,s}\right) \\
&= C\, MF(x)\,.
\end{aligned}$$

2.Fall: $|B| \leq \left(\frac{1-|x|}{2}\right)^n$

Für alle $y \in B$ gilt dann

$$1-|x| \leq 1-|y|+|x-y| \leq 1-|y|+|B|^{1/n} \leq 1-|y|+\frac{1-|x|}{2}\,.$$

Daraus folgt $1-|y| \geq \frac{1-|x|}{2}$ und damit

$$\inf_{y\in B} \rho(y) = \inf_{y \in B} (1-|y|)^{\frac{n}{s}} \geq 2^{-\frac{n}{s}}(1-|x|)^{\frac{n}{s}} = 2^{-\frac{n}{s}}\rho(x) > 0\,.$$

Daher ist $B \subset B_0$.

Für alle $y \in \sigma B$ gilt

$$\begin{aligned}
1-|y| &\leq 1-|x|+|x-y| \leq 1-|x|+\sigma|B|^{1/n} \\
&\leq 1-|x|+\frac{\sigma}{2}(1-|x|) \leq \frac{3}{2}(1-|x|)\,.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\sup_{y\in\sigma B} \rho(y) = \sup_{y\in\sigma B} (1-|y|)^{\frac{n}{s}} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{s}} (1-|x|)^{\frac{n}{s}} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{s}} \rho(x)$$

beziehungsweise

$$\frac{\sup\limits_{y\in\sigma B}\rho(y)}{\inf\limits_{y\in B}\rho(y)} \quad\leq\quad 3^{\frac{n}{s}} \quad\leq\quad 3^n\,.$$

Da in diesem Fall $B \subset B_0 \subset \Omega$, kann die schwache inverse Hölder-Ungleichung (6.29) benutzt werden,

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{\sigma B}|F(y)|^s\,dy\right)^{\frac{1}{s}} &\leq \sup_{y\in\sigma B}\rho(y)\left(\fint_{\sigma B}|f(y)|^s\,dy\right)^{\frac{1}{s}}+\left(\fint_{B_0}|f(y)|^s\,dy\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq A_s\sup_{y\in\sigma B}\rho(y)\fint_B|f(y)|\,dy\;+\;\left(\fint_{B_0}|f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq A_s\,\frac{\sup\limits_{y\in\sigma B}\rho(y)}{\inf\limits_{y\in B}\rho(y)}\fint_B\rho(y)|f(y)|\,dy+\left(\fint_{B_0}|f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq 3^nA_s\fint_B\rho(y)|f(y)|\,dy\;+\;\left(\fint_{B_0}|f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq (3^nA_s+1)\,MF(x)\quad\leq\quad C\,MF(x)\,.
\end{aligned}$$

□

Satz 6.19 *Die Funktion $f\in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $s>1$, erfülle die schwache inverse Hölder-Ungleichung der Form*

$$\left(\fint_{\sigma B}|f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\quad\leq\quad A_s\fint_B|f(x)|\,dx\,,\qquad \sigma\in(0,1] \tag{6.32}$$

für alle Kugeln $B\subset\Omega$. Dann existiert ein $p=p(n,s,\sigma,A_s)>s$ und ein $C=C(n,s,\sigma,A_s)$, so daß $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\left(\fint_{\sigma B}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\quad\leq\quad C\fint_B|f(x)|\,dx\,. \tag{6.33}$$

Beweis. Die Funktion

$$F_t(x)\;=\;\rho(x)\,|f_t(x)|+\left(\fint_{B_0}|f_t(y)|^s\,dy\right)^{\frac{1}{s}},\quad \rho(x)=(1-|x|)^{\frac{n}{s}}\,,$$

erfüllt nach Lemma 6.18 die Abschätzung

$$M_sF_t(x)\;\leq\;C\,MF_t(x)\,.$$

Mit Korollar 6.10 erhält man einen Exponenten $p = p(n, s, \sigma, A_s) > s$, so daß gilt

$$\begin{aligned}\left(⨍_{B_0} |F_t(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(⨍_{B_0} |MF_t(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(\frac{3^{n+2}p^2}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(⨍_{B_0} |F_t(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}. \qquad (6.34)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus der Definition von F_t und mit Eigenschaft (ii) aus Lemma 6.16 sowie mit $\rho(x) \le 1$

$$\begin{aligned}\left(⨍_{B_0} \rho(x)^p|f_t(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(⨍_{B_0} |F_t(x) - [f_t]_{s,B_0}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(⨍_{B_0} |F_t(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + [f_t]_{s,B_0}\\ &\le \left(\frac{3^{n+2}p^2}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(⨍_{B_0} \Big(\rho(x)|f_t(x)| + [f_t]_{s,B_0}\Big)^s dx\right)^{\frac{1}{s}} + [f_t]_{s,B_0}\\ &\le \left(\frac{3^{n+2}p^2}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(⨍_{B_0} \rho(x)^s|f_t(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} + [f_t]_{s,B_0}\right) + [f_t]_{s,B_0}\\ &\le \left(1 + 2\Big(\frac{3^{n+2}p^2}{p-1}\Big)^{\frac{1}{p}}\right) \left(⨍_{B_0} |f_t(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\ &\le \left(1 + 2\Big(\frac{3^{n+2}p^2}{p-1}\Big)^{\frac{1}{p}}\right) (1-t)^{-\frac{n}{s}} \left(⨍_{B_0} |f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

Läßt man t gegen null laufen, so ist mit Eigenschaft (iii) aus Lemma 6.16 auf der linken Seite das Lemma von Fatou [Mun] anwendbar (mit dem gewichteten Maß $d\tilde{x} = \rho(x)^p dx$)

$$\liminf_{t\to 0} \left(⨍_{B_0} |f_t(x)|^p\,d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(⨍_{B_0} \liminf_{t\to 0} |f_t(x)|^p\,d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(⨍_{B_0} |f(x)|^p\,d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung von $\rho(x) \ge (1-\sigma)^{\frac{n}{s}}$ für $x \in \sigma B_0$

$$\left(⨍_{\sigma B_0} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{C}(n, s, \sigma, A_s) \left(⨍_{B_0} |f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}. \qquad (6.35)$$

Da $B_0 \subset \Omega$ beliebig, kann (6.35) auch auf σB, $B \subset \Omega$, $0 < \sigma \le 1$, angewandt werden, und mit (6.32) erhält man

$$\left(⨍_{\sigma^2 B} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{C} \left(⨍_{\sigma B} |f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}} \le C ⨍_{B} |f(x)|\,dx,$$

mit $C = C(n, s, \sigma, A_s) = A_s\tilde{C}$, woraus direkt die Behauptung folgt. $\Box$

Bemerkung. Aus technischen Gründen wurde die schwache inverse Hölder-Ungleichung in (6.32) mit $q = 1$ benutzt; dies bedeutet keine Einschränkung für $q \geq 1$.

7 Eine Abschätzung für schwache Lösungen der A-harmonischen Gleichung

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht die zu (3.24) analoge Abschätzung für "schwache" Lösungen der A-harmonischen Gleichung (3.22), die wie folgt definiert sind.

Definition 7.1 *Sei $g \in L^s(\mathbb{R}^n, \Lambda)$, $p - 1 \leq s \leq \infty$, und $h \in L^{\frac{s}{p-1}}(\mathbb{R}^n, \Lambda)$. Eine Differentialform $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \Lambda)$ wird schwache Lösung der A-harmonischen Gleichung*

$$d^*A(x, g + du) = d^*h$$

genannt, wenn $du \in L^s(\mathbb{R}^n, \Lambda)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle A(x, g + du), d\alpha \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle h, d\alpha \rangle \tag{7.1}$$

für alle (Test-)Differentialformen $\alpha \in L^{\frac{s}{s-p+1}}(\mathbb{R}^n, \Lambda)$.

Bemerkung. Die Exponenten $p' = \frac{s}{s-p+1}$ und $q' = \frac{s}{p-1}$ sind hölder-konjugiert; vergleiche auch mit Lemma 2.19 sowie mit dem Variationsproblem (3.21).

Theorem 1 *Seien g und h wie in Definition 7.1 gegeben. Für jede A-harmonische Gleichung $d^*A(x, g + du) = d^*h$ existiert ein $\nu = \nu(n, p, \lambda) \in (0, \frac{1}{2})$ und eine Konstante $C = C(p, \lambda) > 0$, so daß jede schwache Lösung u, mit $du \in L^s(\mathbb{R}^n, \Lambda)$ und $p - \nu \leq s \leq p + \nu$, die Abschätzung*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |du|^s \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^s + \int_{\mathbb{R}^n} |h|^{\frac{s}{p-1}} \right) \tag{7.2}$$

erfüllt.

Bemerkungen. (i) Für die duale A^*-harmonische Gleichung gelten ähnliche Abschätzungen.
(ii) Die A-harmonische Gleichung (3.22) wird für Differentialformen aus dem Raum $L^p_1(\mathbb{R}^n, \Lambda)$ betrachtet. Sie bestimmt p als natürlichen Exponenten der Integrabilität für du. Abschätzungen für Exponenten s ungleich p sind besonders für $s < p$ sehr schwierig. Dies liegt daran, daß die Anforderung an die Testformen, im Raum $L^{\frac{s}{s-p+1}}$ zu sein, sehr restriktiv ist, vergleiche hierzu [IS] S.2.
(iii) Im Falle $H(x) = Id : \Lambda(\mathbb{R}^n) \to \Lambda(\mathbb{R}^n)$ bleibt (7.2) für alle $s \geq p$ gültig. Allerdings folgt aus dem Beweis von Theorem 1, daß $\nu(n, p, \lambda)$ gegen null geht, wenn p sich 1 oder ∞ nähert beziehungsweise wenn n oder λ gegen unendlich gehen.

Der Beweis von Theorem 1 basiert auf einer Stabilitätseigenschaft der Hodge-Operatoren (Abschnitt 7.1) und nutzt die technischen Hilfsmittel aus den Kapiteln 5 und 6.

7.1 Stabilität des Kerns der Hodge-Operatoren

Aus der Hodge-Zerlegung der Differentialform $\omega \in L^p(\mathbb{R}^n, \Lambda)$, $1 < p < \infty$, gehen die Hodge-Operatoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hervor, vergleiche Abschnitt 2.4. Die wichtigsten Eigenschaften dieser linearen Operatoren sind:

(i) Beschränktheit, die L^p-Norm ist kleiner als eine nur von der Dimension abhängige Konstante; speziell ist die $L^{\frac{4}{3}}$-Norm nicht größer als $16n$, vergleiche auch Bemerkung (iii) zu Lemma 2.18 und [IM3]

(ii) Ihr Bild ist harmonisch außerhalb des Trägers des Urbildes (siehe (2.34)).

Sei $\mathcal{H}$ wieder ein endlich-dimensionaler Hilbertraum. Die folgenden Aussagen gelten für allgemeine lineare Operatoren

$$T \,:\, L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}), \quad 1 < p < \infty\,,$$

die die Eigenschaften (i) und (ii) besitzen. Der Kern von T bleibt unter bestimmten nichtlinearen Störungen in gewissem Sinne stabil (Satz 7.2).

Satz 7.2 *Für $\omega \in L^{p(1+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}) \bigcap \ker T$, $p \geq \frac{7}{4}$ und $\varepsilon > -\frac{1}{2}$, existiert eine nur von n abhängige Konstante $C = C(n)$ mit*

$$\|T\,(|\omega|^\varepsilon \omega)\,\|_p \;\leq\; C\,|\varepsilon|\,p\,\|\,|\omega|^\varepsilon \omega\,\|_p\,. \tag{7.3}$$

Zum Beweis wird folgendes Lemma benötigt.

Lemma 7.3 *Für eine Funktion $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, $c \in \mathbb{R}$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ von endlichem Maß gilt*

$$[\phi - \phi_E]_{p,E} \;\leq\; 2\,[\phi - c]_{p,E}\,.$$

Beweis. Mit der Dreiecksungleichung ist

$$[\phi - \phi_E]_{p,E} \;\leq\; [\phi - c]_{p,E} + [\phi_E - c]_{p,E}\,.$$

Es läßt sich $[\phi_E - c]_{p,E}$ mit der Hölder-Ungleichung weiter abschätzen,

$$\begin{aligned} |\phi_E - c| \;&=\; \left|\frac{1}{|E|}\int_E |\phi(y)|\,dy - \frac{1}{|E|}\int_E c\,dy\right| \\ &\leq\; \frac{1}{|E|}\int_E |\phi(y) - c|\,dy \;=\; [\phi - c]_{1,E} \\ &\leq\; \left(\frac{1}{|E|}\int_E |\phi(y) - c|^p\,dy\right)^{1/p} \;=\; [\phi - c]_{p,E}\,. \end{aligned}$$

□

Der Beweis von Satz 7.2 nutzt die Ergebnisse der Theorie der Maximalfunktionen aus Abschnitt 6.1.

Beweis. Bezeichne $\phi = |\omega|^\varepsilon \omega$ und $F = T(|\omega|^\varepsilon \omega)$. Die Grundlage des Beweises bildet die Abschätzung

$$M^{\#}_{\frac{4}{3}} F(x) \;\leq\; C_1(n)\,|\varepsilon|\, M_{\frac{5}{3}}\phi(x)\,. \tag{7.4}$$

Um diese zu zeigen, sei $B = B(x,r)$ eine Kugel in $I\!R^n$ und a eine nichtnegative Konstante. Nach Voraussetzung gilt $T\omega = 0$. Die Eigenschaften von T lassen folgende Schreibweise zu

$$F \;=\; T\left((|\omega|^\varepsilon - a)\omega\right) \;=\; T\left(\mathcal{X}_B(|\omega|^\varepsilon - a)\omega\right) + H\,, \tag{7.5}$$

mit der in B harmonischen Funktion

$$H \;=\; T\left(\mathcal{X}_{I\!R^n\setminus B}(|\omega|^\varepsilon - a)\omega\right) \quad \in L^p(I\!R^n, \mathcal{H})\,.$$

Da $\|T\|_{\frac{4}{3},B} \leq 16n$, schließt man aus (7.5) mit der Dreiecksungleichung auf

$$[F-H]_{\frac{4}{3},B} \;\leq\; 16n\,[(|\omega|^\varepsilon - a)\omega]_{\frac{4}{3},B} \qquad \text{beziehungsweise} \tag{7.6}$$

$$[H-F_B]_{\frac{4}{3},B} \;\leq\; [F-F_B]_{\frac{4}{3},B} \,+\, 16n\,[(|\omega|^\varepsilon - a)\omega]_{\frac{4}{3},B}\,. \tag{7.7}$$

Sei a die Konstante aus Lemma 5.1. Dementsprechend gilt (vergleiche Definition der Maximalfunktion in Abschnitt 6.1)

$$[(|\omega|^\varepsilon - a)\omega]_{\frac{4}{3},B} \;\leq\; 57\,|\varepsilon|\,[\phi]_{\frac{5}{3},B} \;\leq\; 57\,|\varepsilon|\,M_{\frac{5}{3}}\phi(x)\,.$$

Somit wird aus (7.6) und (7.7)

$$[F-H]_{\frac{4}{3},B} \;\leq\; 912n\,|\varepsilon|\,M_{\frac{5}{3}}\phi(x)\,, \tag{7.8}$$

$$[H-F_B]_{\frac{4}{3},B} \;\leq\; M^{\#}_{\frac{4}{3}}F(x) \,+\, 912n\,|\varepsilon|\,M_{\frac{5}{3}}\phi(x)\,. \tag{7.9}$$

Andererseits gilt mit $|\sigma B| = \sigma^n|B|$, Lemma 7.3 und (7.8) für $0 < \sigma \leq 1$

$$\begin{aligned}
[F-F_{\sigma B}]_{\frac{4}{3},\sigma B} &\leq\; 2\,[F-H_B]_{\frac{4}{3},\sigma B} \\
&\leq\; 2\,[F-H]_{\frac{4}{3},\sigma B} \,+\, 2\,[H-H_B]_{\frac{4}{3},\sigma B} \\
&\leq\; 2\sigma^{-\frac{3n}{4}}[F-H]_{\frac{4}{3},B} \,+\, 2\,[H-H_B]_{\frac{4}{3},\sigma B} \\
&\leq\; 2\sigma^{-\frac{3n}{4}}912n\,|\varepsilon|\,M_{\frac{5}{3}}\phi(x) \,+\, 2\,[H-H_B]_{\frac{4}{3},\sigma B}\,.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Wendet man Lemma 5.4 auf die harmonische Funktion $H - H_B$ an, so kann der letzte Term von (7.10) mit Hilfe von (7.9) und Lemma 7.3 abgeschätzt werden,

$$\begin{aligned} 2\,[H - H_B]_{\frac{4}{3},\sigma B} &\leq 2 \cdot 4^{n+1}\sigma\,[H - H_B]_{\frac{4}{3},B} \leq 4^{n+2}\sigma\,[H - F_B]_{\frac{4}{3},B} \\ &\leq 4^{n+2}\sigma \left(M^{\#}_{\frac{4}{3}} F(x) + 912n\,|\varepsilon|\, M_{\frac{5}{3}}\phi(x) \right). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Folglich wird aus (7.10), $\sigma = 4^{-n-3}$ gesetzt,

$$[F - F_{\sigma B}]_{\frac{4}{3},\sigma B} \leq \frac{1}{4} M^{\#}_{\frac{4}{3}} F(x) + \frac{3}{4} C_1(n)\,|\varepsilon|\, M_{\frac{5}{3}}\phi(x)\,. \tag{7.12}$$

Da B eine beliebige Kugel um x war, gilt (7.12) auch für das Supremum über alle Kugeln um x, so daß die linke Seite zur scharfen Maximalfunktion mit dem Exponenten 4/3 wird. Damit folgt die Abschätzung (7.4).

Die Behauptung (7.3) folgt aus (7.4) unter Anwendung der L^p-Ungleichungen für die Maximalfunktionen, vergleiche Satz 6.13 und (6.5),

$$\begin{aligned} \|F\|_p &\leq \|M_{\frac{4}{3}} F\|_p \leq C_2(n)\,p\,\|M^{\#}_{\frac{4}{3}} F\|_p \\ &\leq C_3(n)\,p\,|\varepsilon|\,\|M_{\frac{5}{3}}\phi\|_p \\ &\leq C_4(n)\,p\,|\varepsilon| \left(\frac{p^2}{\frac{5}{3}(p - \frac{5}{3})} \right)^{\frac{1}{p}} \|\phi\|_p\,. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Elementare Rechnungen ergeben

$$\left(\frac{3p^2}{5(p - \frac{5}{3})} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{3}{5} \right)^{\frac{4}{7}} p^{\frac{2}{p}} \left(\frac{1}{\frac{7}{4} - \frac{5}{3}} \right)^{\frac{4}{7}}. \tag{7.14}$$

Da die Funktion $p \to p^{\frac{2}{p}}$, $p \geq \frac{7}{4}$, bei e ein globales Maximum hat, bleibt der Ausdruck (7.14) kleiner als 10. Damit folgt aus (7.13) unter Berücksichtigung der Definitionen von F und ϕ die Behauptung (7.12), mit der Konstanten $C(n) = 10\,C_4(n)$.

□

Die Anwendung von Satz 7.2 auf die Hodge-Operatoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ergibt die folgenden Abschätzungen.

Korollar 7.4 *Sei $\omega \in L^{p(1+\varepsilon)}(I\!R^n, \Lambda)$, $r \geq \frac{7}{4}$ und $\varepsilon \geq -\frac{1}{2}$. Man betrachte die Hodge-Zerlegung*

$$|\omega|^{\varepsilon}\omega = d\alpha + d^*\beta\,, \qquad \alpha, \beta \in L^r_1(I\!R^n, \Lambda)\,. \tag{7.15}$$

Ist ω geschlossen, das heißt $\omega \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, dann gilt

$$\|d^*\beta\|_r \;\leq\; C\, r\, |\varepsilon|\, \|\omega\|^{1+\varepsilon}_{r(1+\varepsilon)}\,; \tag{7.16}$$

beziehungsweise ist ω kogeschlossen, das heißt $\omega \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$, dann gilt

$$\|d\alpha\|_r \;\leq\; C\, r\, |\varepsilon|\, \|\omega\|^{1+\varepsilon}_{r(1+\varepsilon)}\,, \tag{7.17}$$

mit einer nur von der Dimension abhängigen Konstanten $C = C(n)$.

7.2 Beweis von Theorem 1

In $\Lambda(I\!R^n)$ ist das innere Produkt $\langle .\,,.\rangle_H = \langle H(x)\,.\,,.\rangle$ und die Norm $|\,.\,|_H = (\langle .\,,.\rangle_H)^{1/2}$ gegeben. Es sei an Ungleichung (3.14) erinnert,

$$\lambda^{-1}|\xi| \;\leq\; |\xi|_H \;\leq\; \lambda|\xi|\,. \tag{7.18}$$

Aus der Definition der Abbildung $A:\, \Lambda(I\!R^n) \to \Lambda(I\!R^n)$, vergleiche (3.17), ergibt sich mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und (7.18)

$$\begin{aligned} \langle A(x,\zeta),\xi\rangle \;&=\; \langle H\zeta,\zeta\rangle^{\frac{p-2}{2}}\langle H\zeta,\xi\rangle \\ &=\; |\zeta|_H^{p-2}\langle\zeta,\xi\rangle_H \;\leq\; |\zeta|_H^{p-1}|\xi|_H \;\leq\; \lambda^p|\zeta|^{p-1}|\xi|\,. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Die Ausgangsbasis für den Beweis von Theorem 1 ist eine algebraische Abschätzung.

Lemma 7.5 *Sei $s \geq p-1 > 1$, dann gilt*

$$|\xi|^s \;\leq\; 2^p\lambda^p\langle A(x,\xi+\zeta), |\xi|^{s-p}\xi\rangle + 4^s\lambda^{4s}|\zeta|^s \tag{7.20}$$

für alle $\xi,\zeta \in \Lambda(I\!R^n)$.

Beweis. Ausgehend von der einfachen Tatsache

$$\left(|\eta|_H^2 - |\zeta|_H^2\right)\left(|\eta|_H^{p-2} - |\zeta|_H^{p-2}\right) \;\geq\; 0\,,$$

kommt man durch äquivalentes Umformen zu

$$\begin{aligned} &|\eta|_H^p + |\zeta|_H^p - |\eta|_H^2|\zeta|_H^{p-2} - |\zeta|_H^2|\eta|_H^{p-2} - 2\,\langle\eta,\zeta\rangle_H\left(|\eta|_H^{p-2} + |\zeta|_H^{p-2}\right) \\ &\qquad\qquad \geq\; -2\,\langle\eta,\zeta\rangle_H\left(|\eta|_H^{p-2} + |\zeta|_H^{p-2}\right)\,, \end{aligned}$$

$$\left(|\eta|_H^{p-2} + |\zeta|_H^{p-2}\right)\left(|\eta|_H^2 + |\zeta|_H^2 - 2\,\langle\eta,\zeta\rangle_H\right)$$

$$\leq\ 2\left(|\eta|_H^p + |\zeta|_H^p - \langle |\eta|_H^{p-2}\eta, \zeta\rangle_H - \langle |\zeta|_H^{p-2}\zeta, \eta\rangle_H\right)$$

beziehungsweise

$$\left(|\eta|_H^{p-2} + |\zeta|_H^{p-2}\right) |\eta - \zeta|_H^2 \ \leq\ 2\,\langle |\eta|_H^{p-2}\eta - |\zeta|_H^{p-2}\zeta, \eta - \zeta\rangle_H\,.$$

Andererseits gilt nach (1.6) $|\eta - \zeta|_H^{p-2} \leq 2^{p-2}\left(|\eta|_H^{p-2} + |\zeta|_H^{p-2}\right)$ für $p \geq 2$. Damit ergibt sich

$$|\eta - \zeta|_H^p \ \leq\ 2^{p-1}\langle |\eta|_H^{p-2}\eta, \eta - \zeta\rangle_H + 2^{p-1}\langle |\zeta|_H^{p-2}\zeta, \eta - \zeta\rangle_H\,.$$

Setzt man $\xi = \eta - \zeta$, erhält man mit (7.19)

$$|\xi|_H^p \ \leq\ 2^{p-1}\langle A(x, \xi + \zeta), \xi\rangle + 2^{p-1}|\zeta|_H^{p-1}|\xi|_H\,.$$

Mit (7.18) kehrt man zu euklidischen Normen zurück. Beide Seiten mit $\lambda^p|\xi|^{s-p}$ multipliziert, ergibt

$$|\xi|^s \ \leq\ 2^{p-1}\lambda^p\langle A(x, \xi + \zeta), |\xi|^{s-p}\xi\rangle + 2^{p-1}\lambda^{2p}|\zeta|^{p-1}|\xi|^{s-p+1}\,. \tag{7.21}$$

Der letzte Term kann mit Hilfe der Youngschen Ungleichung (1.4) abgeschätzt werden, mit $p' = \frac{s}{p-1}$, $q' = \frac{s}{s-p+1}$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$,

$$\begin{aligned} |\zeta|^{p-1}|\xi|^{s-p+1} &= \tau^{\frac{p-s-1}{s}}|\zeta|^{p-1}\tau^{\frac{s-p+1}{s}}|\xi|^{s-p+1} \\ &\leq \tau^{\frac{p-s-1}{p-1}}|\zeta|^s + \tau\,|\xi|^s\,, \end{aligned} \tag{7.22}$$

für alle $s \geq p - 1$ und positive τ. Wählt man $\tau = 2^{-p}\lambda^{-2p}$, so wird aus (7.21)

$$|\xi|^s \ \leq\ 2^{p-1}\lambda^p\langle A(x, \xi + \zeta), |\xi|^{s-p}\xi\rangle + \frac{1}{2}|\xi|^s + 2^{p-1}\lambda^{2p}\left(2^p\lambda^{2p}\right)^{\frac{s-p+1}{p-1}}|\zeta|^s$$

beziehungsweise

$$|\xi|^s \ \leq\ 2^p\lambda^p\langle A(x, \xi + \zeta), |\xi|^{s-p}\xi\rangle + 2^p\lambda^{2p}\left(2^p\lambda^{2p}\right)^{\frac{s-p+1}{p-1}}|\zeta|^s\,.$$

Die Exponenten im letzten Vorfaktor können wie folgt abgeschätzt werden

$$p + p\frac{s-p+1}{p-1} \ \leq\ p + p\frac{s-p}{p-s} + \frac{p}{p-1} \ \leq\ s + 1 - p + p \ \leq\ 2s$$

und

$$2p + 2p\frac{s-p+1}{p-1} \ \leq\ 4s\,.$$

Daraus folgt die Behauptung (7.20). □

Im Beweis von Theorem 1 werden zwei Fälle, $p \geq 2$ beziehungsweise $p \leq 2$, betrachtet, wobei der zweite aus dem ersten durch Übergang zur konjugierten A-harmonischen Gleichung folgt (vergleiche Abschnitt 3.3).

Beweis. 1. Fall: $p \geq 2$

Mit Lemma 7.5 gilt die Abschätzung

$$\int_{I\!R^n} |du|^s \;\leq\; 2^p\lambda^p \int_{I\!R^n} \langle A(x, g+du), |du|^{s-p} du\rangle + 4^s\lambda^{4s} \int_{R^n} |g|^s . \tag{7.23}$$

Es wird die Hodge-Zerlegung

$$|du|^{s-p} du \;=\; d\alpha \,+\, d^*\beta\,, \tag{7.24}$$

mit den Differentialformen $\alpha, \beta \in L^{\frac{s}{s-p+1}}(I\!R^n, \Lambda)$ benutzt.

Aus der Annahme $p \geq 2$ und der Voraussetzung $|s-p| \leq \nu < \frac{1}{3}$ folgt

$$r \;=\; \frac{s}{s-p+1} \;>\; \frac{7}{4}\,, \tag{7.25}$$

denn

$$s - p \;<\; \frac{8-7}{3} \;\leq\; \frac{4p-7}{3}\,, \qquad 7s + 7 - 7p \;<\; 4s\,,$$

was gleichbedeutend mit (7.25) ist.

Korollar 7.4 ist auf die geschlossene Form $\omega = du \in L^{r(1+\varepsilon)}(I\!R^n, \Lambda)$ mit $\varepsilon = s-p$, $|\varepsilon| \leq \nu < \frac{1}{2}$, $r \geq \frac{7}{4}$ anwendbar. Die Ungleichung (7.17) ergibt

$$\|d^*\beta\|_r \;\leq\; C(n)\, r\, \nu\, \|du\|_s^{s+1-p}\,. \tag{7.26}$$

Sei die Zahl ν bestimmt durch

$$\nu \;=\; \frac{1}{2\, C(n)\, 4^p \lambda^{2p}}\,. \tag{7.27}$$

Mit dieser Annahme folgt aus (7.24) und (7.26)

$$\|d\alpha\|_r \;\leq\; \|du\|_r + \|d^*\beta\|_r \;\leq\; \left(1 + \frac{1}{2^{2p+1}\lambda^{2p}}\right) \|du\|_r \;\leq\; 2\, \|du\|_r\,. \tag{7.28}$$

Die Hodge-Zerlegung (7.24) in die Abschätzung (7.23) eingesetzt, ergibt unter Berücksichtigung von Definition 7.1

$$\int_{I\!R^n} |du|^s \;\leq\; 2^p\lambda^p \int_{I\!R^n} \Big(\langle h, d\alpha\rangle + \langle A(x, g+du), d^*\beta\rangle\Big) + 4^s\lambda^{4s} \int_{R^n} |g|^s\,.$$

Mit (7.19) und der Schwarzschen beziehungsweise der Hölderschen Ungleichung kann weiter abgeschätzt werden

$$\begin{aligned}\|du\|_s^s &\leq 2^p\lambda^p \int_{R^n} |g+du|_H^{p-1}|d^*\beta|_H + 2^p\lambda^p \int_{R^n} |h|\,|d\alpha| \;+\; 4^s\lambda^{4s}\int_{\mathbb{R}^n}|g|^s \\ &\leq 2^p\lambda^{2p}\|g+du\|_s^{p-1}\|d^*\beta\|_r + 2^p\lambda^p\|h\|_{\frac{s}{p-1}}\|d\alpha\|_r \;+\; 4^s\lambda^{4s}\|g\|_s^s\,.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Abschätzungen (7.26) und (7.28) können die Normen von $d^*\beta$ beziehungsweise $d\alpha$ durch die Norm von du ersetzt werden,

$$\begin{aligned}\|du\|_s^s \;\leq\;& 2^p\lambda^{2p}C(n)\,r\,\nu\,\|g+du\|_s^{p-1}\|du\|_s^{s+1-p} \\ &+ 2^{p+1}\lambda^p\|h\|_{\frac{s}{p-1}}\|du\|_s^{s+1-p} \;+\; 4^s\lambda^{4s}\|g\|_s^s\,.\end{aligned} \tag{7.29}$$

Es bleibt noch du von den anderen Termen zu trennen. Dazu wird erneut die Youngsche Ungleichung mit den gleichen Exponenten wie bei (7.22) benutzt. Der erste Term kann mit (1.6) abgeschätzt werden,

$$\begin{aligned}\|g+du\|_s^{p-1}\|du\|_s^{s+1-p} &\leq 2^{p-2}\left(\|du\|_s^{p-1}+\|g\|_s^{p-1}\right)\|du\|_s^{s-p+1} \\ &= 2^{p-2}\left(\|du\|_s^{s}+\|g\|_s^{p-1}\|du\|_s^{s-p+1}\right) \\ &\leq 2^{p-1}\|du\|_s^s \;+\; 2^{p-2}\|g\|_s^{p-1}\,.\end{aligned} \tag{7.30}$$

Der zweite Term der rechten Seite von (7.29) wird wie folgt abgeschätzt

$$\begin{aligned}2^{p+1}\lambda^p\|h\|_{\frac{s}{p-1}}\|du\|_s^{s+1-p} &= 2^{p+1+2\frac{s-p+1}{s}}\lambda^p\|h\|_{\frac{s}{p-1}}2^{-2\frac{s-p+1}{s}}\|du\|_s^{s+1-p} \\ &\leq 2^{\frac{s(p+1)+2(s-p+1)}{p-1}}\lambda^{\frac{sp}{p-1}}\|h\|_{\frac{s}{p-1}}^{\frac{s}{p-1}} \;+\; \frac{1}{4}\,\|du\|_s^s\,,\end{aligned} \tag{7.31}$$

wobei der erste Vorfaktor mit den Bedingungen für s und p noch zu $32^s\lambda^{2s}$ vereinfacht werden kann, denn es gilt

$$\frac{s(p+1)+2(s-p+1)}{p-1} \;\leq\; s\frac{p}{p-1}+s+2(s-p+1) \;\leq\; 2s+s+\frac{8}{3} \;<\; 5s$$

beziehungsweise

$$\frac{sp}{p-1} \;\leq\; 2s\,.$$

Setzt man (7.30) und (7.31) in (7.29) ein, kommt man zu der Ungleichung

$$\|du\|_s^s \;\leq\; \frac{C}{2}\left(\|g\|_s^s+\|h\|_{\frac{s}{p-1}}^{\frac{s}{p-1}}\right)+\frac{1}{4}\,\|du\|_s^s+2^{2p-1}C(n)\lambda^{2p}\,r\,\nu\|du\|_s^s\,,$$

wobei sich $C = C(s,p,\lambda)$ als Maximum der Vorfaktoren der Normen von g beziehungsweise von h ergibt. Durch die Festlegung von ν (7.27) wird der Faktor im letzten Term zu $\frac{1}{4}$. Damit folgt die Behauptung

$$\|du\|_s^s \;\leq\; C\,\left(\|g\|_s^s \,+\, \|h\|_{\frac{s}{p-1}}^{\frac{s}{p-1}}\right)$$

für den Fall $p \geq 2$.

<u>2. Fall</u>: $1 < p \leq 2$

Die A-harmonische Gleichung

$$d^*A(x, g+du) \;=\; d^*h \quad , \quad A(x,\xi) \;=\; \langle H(x)\xi,\xi\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(x)\xi \tag{7.32}$$

ist äquivalent zu ihrer konjugierten Gleichung (3.31) (vergleiche Abschnitt 3.3)

$$dA^{-1}(x, h+d^*v) \;=\; dg \quad , \quad A^{-1}(x,\zeta) \;=\; \langle H^{-1}(x)\zeta,\zeta\rangle^{\frac{q-2}{2}} H^{-1}(x)\zeta \tag{7.33}$$

für die koexakte Form

$$d^*v \;=\; A(x, g+du) \,-\, h \tag{7.34}$$

mit dem zu p hölder-konjugierten Exponenten q, das heißt $(p-1)(q-1) = 1$. Gleichzeitig ist (7.33) die duale $\tilde{A}^*$-harmonische Gleichung (vergleiche (3.23)) zu

$$d^*\tilde{A}(x, g+du) \;=\; d^*h \quad , \quad \tilde{A} \;=\; \langle\, \tilde{H}(x)\xi,\xi\rangle^{\frac{\tilde{p}-2}{2}} \tilde{H}(x)\xi\,,$$

mit $\tilde{A}^* = A^{-1}$, $H^{-1} = \star\tilde{H}\star$ sowie $\tilde{p} = q$. Desweiteren folgert man aus Bedingung (7.18), daß

$$\lambda^{-1}|\xi| \;\leq\; \gamma_i\,|\xi| \;\leq\; \lambda|\xi| \tag{7.35}$$

(wobei mit γ_i die positiven Wurzeln der Eigenwerte von H bezeichnet seien) für die zu den entsprechenden Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren ξ gilt. Da die Eigenvektoren ein vollständiges Orthogonalsystem bilden und damit den ganzen euklidischen Raum $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ aufspannen, gilt (7.35) für alle $\xi \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$. Durch Invertierung von (7.35),

$$\lambda^{-1}|\xi| \;\leq\; \frac{1}{\gamma_i}\,|\xi| \;\leq\; \lambda|\xi|\,,$$

sieht man, daß H^{-1} die Elliptizitätsbedingung (7.18) mit dem gleichen λ erfüllt, da $\frac{1}{\gamma_i}$ die positiven Wurzeln der Eigenwerte von H^{-1} sind. Das heißt, (7.33) ist bezüglich des Hodge-Sternoperators dual zu einer Gleichung vom Typ (3.22) mit der gleichen Konstanten λ. Also kann Ungleichung (7.2), die schon für $p \geq 2$ gezeigt wurde, auf (7.33) angewandt werden.

Mit $r = \frac{s}{p-1}$ und $q = \frac{p}{p-1}$ ist

$$g \in L^{\frac{r}{q-1}}(I\!R^n, \Lambda) \qquad \text{und} \qquad h,\, d^*v \in L^r(I\!R^n, \Lambda)\,.$$

Die Funktion $\nu(n, p, \lambda)$, die im ersten Fall für $p \geq 2$ definiert war, wird durch

$$\nu(n, p, \lambda) \;=\; (p-1)\,\nu(n, q, \lambda)$$

für alle $1 < p < \infty$ fortgesetzt. Damit wird aus der Bedingung $p - \nu(n, p, \lambda) \leq s \leq p + \nu(n, p, \lambda)$

$$p - (p-1)\,\nu(n, q, \lambda) \;\leq\; s \;\leq\; p + (p-1)\,\nu(n, q, \lambda)$$

beziehungsweise

$$\frac{p}{p-1} - \nu(n, p, \lambda) \;\leq\; \frac{s}{p-1} \;\leq\; \frac{p}{p-1} + \nu(n, p, \lambda)$$

und damit erhält man die neue Bedingung $q - \nu(n, q, \lambda) \leq r \leq q + \nu(n, q, \lambda)$. Folglich nimmt Abschätzung (7.2) die Form

$$\int_{I\!R^n} |d * v|^r \;\leq\; C(q, \lambda) \left(\int_{I\!R^n} |g|^{\frac{r}{q-1}} \;+\; \int_{I\!R^n} |h|^r \right)$$

an, was unter Berücksichtigung von (7.34) das gleiche ist wie

$$\int_{I\!R^n} |A(x, g + du) - h|^{\frac{s}{p-1}} \;\leq\; C(q, \lambda) \left(\int_{I\!R^n} |g|^s \;+\; \int_{I\!R^n} |h|^{\frac{s}{p-1}} \right). \tag{7.36}$$

Mit der Dreiecksungleichung und (1.6) gilt für $\xi \in \Lambda(I\!R^n)$

$$|A(x, \xi)|^{\frac{s}{p-1}} \;\leq\; (|A(x, \xi) - h| + |h|)^{\frac{s}{p-1}} \;\leq\; 2^{\frac{s-p+1}{p-1}} \left(|A(x, \xi) - h|^{\frac{s}{p-1}} + |h|^{\frac{s}{p-1}} \right)$$

beziehungsweise

$$|A(x, \xi) - h|^{\frac{s}{p-1}} \;\geq\; 2^{-\frac{s-p+1}{p-1}}\, |A(x, \xi)|^{\frac{s}{p-1}} - |h|^{\frac{s}{p-1}}\,. \tag{7.37}$$

Desweiteren erhält man mit der Definition der nichtlinearen Abbildung A (3.17), der Elliptizitätsbedingung (7.18) und der Schwarzschen Ungleichung

$$|\xi|_H^p \;=\; \langle\, A(x, \xi), \xi \rangle \;\leq\; |A(x, \xi)|\, |\xi|$$

beziehungsweise

$$\lambda^{-p} |\xi|^{p-1} \;\leq\; |A(x, \xi)| \qquad \text{für } \xi \in \Lambda\,.$$

Mit $\frac{s}{p-1}$ potenziert, ergibt die Ungleichung

$$|\xi|^s \;\leq\; \lambda^{sq}|A(x,\xi)|^{\frac{s}{p-1}}\,. \tag{7.38}$$

Wendet man die Ungleichungen (7.37) und (7.38) auf $\xi = g + du$ an, wird aus (7.36)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g+du|^s \;\leq\; C_1(p,\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g|^s + \int_{\mathbb{R}^n}|h|^{\frac{s}{p-1}}\right)\,,$$

woraus mit der gleichen Argumentation wie bei (7.37) die Behauptung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |du|^s \;\leq\; C(p,\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g|^s + \int_{\mathbb{R}^n}|h|^{\frac{s}{p-1}}\right)$$

folgt. $\square$

8 Eine Abschätzung vom Caccioppoli-Typ

Um Aussagen über die Regularität von quasiregulären Abbildungen machen zu können, ist es notwendig, eine Abschätzung der Norm einer schwach quasiregulären Abbildung zu haben. Das folgende Theorem liefert eine solche Aussage, wobei der Fall $r < n$ von besonderer Bedeutung ist.

Theorem 2 *Für jedes $n = 2, 3, \ldots$ gibt es Exponenten $1 < r_1 = r_1(n, K) < n < r_2(n, K) = r_2$, so daß gilt: Ist $f \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ schwach K-quasiregulär für ein r, $r_1 \leq r \leq r_2$, dann ist*

$$\int_\Omega |\phi Df(x)|^r \;\leq\; C(n,K) \int_\Omega |f|^r |\nabla\phi|^r \tag{8.1}$$

für jede Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Die Konstante $C(n, K)$ hängt nur von der Dimension n und der linearen Dilatation K ab.

Bemerkung. Abschätzungen wie in (8.1), das heißt, Abschätzungen der lokalen Norm des Differentials einer Abbildung durch die lokale Norm der Abbildung, werden oft als Abschätzungen vom Caccioppoli-Typ bezeichnet (vergleiche [Ri1] S.141).

Beweis. Sei $f \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $r \geq \max\{l, n-l\}$. Seien weiter $I = (i_1, \ldots, i_l)$ und $J = (j_1, \ldots, j_{n-l})$ zwei geordnete Systeme, festgelegt durch die Vorschrift (4.1) $dx_I = \star dx_J$. Wie in (4.2) beziehungsweise (4.3) seien jedem Paar (I, J) die beiden Differentialformen

$$\begin{aligned} u_I &= f^{i_l} df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_{n-l}} \;, \\ v_J &= (-1)^{n+1} \star f^{j_1} df^{j_2} \wedge \ldots \wedge df^{j_{n-l}} \end{aligned}$$

zugeordnet. In (4.4) beziehungsweise (4.5) wurde gezeigt, daß damit

$$\begin{aligned} du_I &= (-1)^{l-1} df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_l} & \in L^{\frac{r}{l}}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Lambda^l) \;, \\ d^* v_J &= (-1)^{l+1} \star df^{j_1} \wedge \ldots \wedge df^{j_{n-l}} & \in L^{\frac{r}{n-l}}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Lambda^l) \;. \end{aligned}$$

Es sei noch an die Gleichung (4.18)

$$A(x, du_I) \;=\; d^* v_J \tag{8.2}$$

mit der nichtlinearen Abbildung (3.17)

$$A(x, \xi) \;=\; \langle\, H(x)\xi, \xi \,\rangle^{\frac{p-2}{2}} H(x)\xi \quad \text{mit} \quad p = \frac{n}{l}$$

und an die Elliptizitätsbedingung (3.14)

$$\lambda^{-1}|\xi| \;\leq\; \langle\, H(x)\xi, \xi \,\rangle^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \lambda\,|\xi|$$

erinnert. Ursprünglich war $H(x)$ nur in Ω definiert. Durch die Erweiterung $H(x) = \mathrm{Id} : \Lambda^l(I\!\!R^n) \to \Lambda^l(I\!\!R^n)$ außerhalb von Ω ist $H(x)$ auf ganz $I\!\!R^n$ definiert (vergleiche (4.10)).

Mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned} A(x, \varphi^l du_I) \;&=\; \langle\, H(x)\varphi^l du_I, \varphi^l du_I \,\rangle^{\frac{n-2l}{2l}} H(x)\varphi^l du_I \\ &=\; \varphi^{l(\frac{n-2l}{l})+l} A(x, du_I) \;=\; \varphi^{n-l} A(x, du_I)\;. \end{aligned}$$

Das heißt, multipliziert man (8.2) mit φ^{n-l}, erhält man

$$A(x, \varphi^l du_I) \;=\; \varphi^{n-l} d^* v_J\;. \tag{8.3}$$

Es werden zwei neue Differentialformen mit kompaktem Träger eingeführt:

$$u \;=\; \varphi^l u_I \qquad \in L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega, \Lambda^{l-1}) \tag{8.4}$$

und

$$v \;=\; \varphi^{n-l} v_J \qquad \in L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega, \Lambda^{l+1})\;. \tag{8.5}$$

Mit Folgerung (ii) aus Definition 2.8 und mit der Definition des Hodge-Koableitungsoperators (2.17) gilt

$$\begin{aligned} du \;&=\; d(\varphi^l) \wedge u_I \;+\; \varphi^l du_I \\ &=\; l\,\varphi^{l-1} d\varphi \wedge u_I \;+\; \varphi^l du_I \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d^* v \;&=\; (-1)^{nl+1} \star d \star (\varphi^{n-l} v_J) \\ &=\; (-1)^{nl+1} \star d(\varphi^{n-l} \star v_J) \\ &=\; (-1)^{nl+1} \star (n-l)\,\varphi^{n-l-1} d\varphi \wedge \star v_J \\ &\qquad + (-1)^{nl+1} \varphi^{n-l} \star d \star v_J \\ &=\; (-1)^{nl+1}(n-l)\,\varphi^{n-l-1} \star (d\varphi \wedge \star v_J) \;+\; \varphi^{n-l} d^* v_J\;. \end{aligned}$$

Das kann man auch schreiben als

$$\varphi^l du_I \;=\; g \;+\; du \tag{8.6}$$

und

$$\varphi^{n-l} d^* v_J \;=\; h \;+\; d^* v \tag{8.7}$$

mit

$$
\begin{aligned}
g &= -l\,\varphi^{l-1} d\varphi \wedge u_I \qquad \in L^{\frac{r}{l}}(I\!R^n, \Lambda^l)\,, && (8.8)\\
h &= (-1)^{nl}(n-l)\,\varphi^{n-l-1} \star (d\varphi \wedge \star v_J) \in L^{\frac{r}{n-l}}(I\!R^n, \Lambda^l) && (8.9)
\end{aligned}
$$

und $du \in L^{\frac{r}{l}}(I\!R^n, \Lambda^l)$, $d^* v_J \in L^{\frac{r}{n-l}}(I\!R^n, \Lambda^l)$. Setzt man (8.6) und (8.7) in (8.3) ein, erhält man

$$A(x, g + du) = h + d^* v\,. \tag{8.10}$$

Darauf den Hodge-Koableitungsoperator angewandt, ergibt die in (3.22) hergeleitete inhomogene A-harmonische Gleichung in $I\!R^n$

$$d^* A(x, g + du) = d^* h\,. \tag{8.11}$$

Sie ist im schwachen Sinne zu verstehen (vergleiche Definition 7.1), das heißt,

$$\int_{I\!R^n} \langle\, A(x, g + du), d\alpha\,\rangle = \int_{I\!R^n} \langle\, h, d\alpha\,\rangle$$

für alle Testformen $\alpha \in L_1^{\overline{\frac{r}{r-(n-l)}}}(I\!R^n, \Lambda^{l-1})$. Der Exponent der Integrabilität $\frac{r}{r-(n-l)}$ ist der zu $\frac{r}{n-l}$ konjugierte Exponent.

Mit $s = \frac{r}{l}$ kann an dieser Stelle Theorem 1 angewandt werden. Es gilt

$$\int_{I\!R^n} |du|^s \le C_1(n, K) \left(\int_{I\!R^n} |g|^s + \int_{I\!R^n} |h|^{\frac{s}{p-1}} \right) \tag{8.12}$$

unter der Bedingung $|s - p| \le \nu(n, K)$ für ein $\nu(n, K) > 0$. Da $p = \frac{n}{l}$ und $s = \frac{r}{l}$ wird diese Bedingung zu $n - l\nu \le r \le n + l\nu$ und man definiert

$$r_1(n, K) = n - l\nu \quad \text{und} \quad r_2(n, K) = n + l\nu\,. \tag{8.13}$$

Mit (8.8) gilt

$$|g|^s = |g|^{\frac{r}{l}} \le \left(l\,\varphi^{l-1} |u_I|\, |\nabla\varphi| \right)^{\frac{r}{l}} \tag{8.14}$$

und mit (8.9)

$$|h|^{\frac{s}{p-1}} = |h|^{\frac{r}{n-l}} \le \left((n-l)\,\varphi^{n-l-1} |v_J|\, |\nabla\varphi| \right)^{\frac{r}{n-l}}\,. \tag{8.15}$$

In Ungleichung (8.12) kann du durch $g + du$ ersetzt werden, vergleiche Beweis von Theorem 1. Damit, mit (8.6), (8.14) und (8.15) erhält man

$$
\begin{aligned}
\int_{I\!R^n} |\varphi^l du_I|^{\frac{r}{l}} = \int_{I\!R^n} |g + du|^s \;\le\; & C_2(n, K) \left(\int_{I\!R^n} \left|\varphi^{l-1} |u_I|\, |\nabla\varphi|\right|^{\frac{r}{l}} \right.\\
& \left. + \int_{I\!R^n} \left|\varphi^{n-l-1} |v_J|\, |\nabla\varphi|\right|^{\frac{r}{n-l}} \right)\,. \qquad (8.16)
\end{aligned}
$$

Verwendet man die Abschätzungen (4.25) und (4.26) wird (8.16) zu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi Df|^r &\leq C_3(n,K)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\varphi Df|^{l-1}|f|\,|\nabla\varphi|\right)^{\frac{r}{l}}\right.\\ &\quad\left.+\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\varphi Df|^{n-l-1}|f|\,|\nabla\varphi|\right)^{\frac{r}{n-l}}\right) \qquad (8.17)\end{aligned}$$

und mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi Df|^r &\leq C_3(n,K)\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi Df|^r\right)^{\frac{l-1}{l}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^r|\nabla\varphi|^r\right)^{\frac{1}{l}}\right.\\ &\quad\left.+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi Df|^r\right)^{\frac{n-l-1}{n-l}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^r|\nabla\varphi|^r\right)^{\frac{1}{n-l}}\right]. \qquad (8.18)\end{aligned}$$

Sei $a = \int_{\mathbb{R}^n}|\varphi Df|^r$ und $b = \int_{\mathbb{R}^n}|f|^r|\nabla\varphi|^r$. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden,
<u>1.Fall:</u> Es gelte

$$a^{\frac{l-1}{l}}b^{\frac{1}{l}} \geq a^{\frac{n-l-1}{n-l}}b^{\frac{1}{n-l}} .$$

Damit wird aus (8.18)

$$a \leq 2\,C_3(n,K)\,a^{\frac{l-1}{l}}b^{\frac{1}{l}}$$

und folglich $a \leq C_4(n,K)\,b$.
<u>2.Fall:</u> Es gelte

$$a^{\frac{l-1}{l}}b^{\frac{1}{l}} < a^{\frac{n-l-1}{n-l}}b^{\frac{1}{n-l}} .$$

Damit ist

$$a \leq 2\,C_3(n,K)\,a^{\frac{n-l-1}{n-l}}b^{\frac{1}{n-l}}$$

und $a \leq C_5(n,K)\,b$.
Beides zusammen ergibt

$$\|\varphi Df\|_{r,\Omega} \leq C(n,K)\,\|\,|f|\,|\nabla\varphi|\,\|_{r,\Omega}$$

und damit die Behauptung.

□

9 Quasiregularität für schwach quasireguläre Abbildungen

Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, daß schwach K-quasireguläre Abbildungen sogar K-quasiregulär sind. Diese Aussage ist auch für $K = 1$ keine Trivialität. Der Beweis dazu basiert vor allem auf Theorem 2.

Theorem 3 *Seien $r_1 = r_1(n, K) < n < r_2(n, K) = r_2$ Exponenten, die durch Theorem 2 festgelegt sind. Dann liegt jede schwach K-quasireguläre Abbildung $f \in W^{1,r_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ auch im Raum $W^{1,r_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und ist damit insbesondere K-quasiregulär.*

Beweis. Für eine fest vorgegebene, schwach K-quasiregläre Abbildung $f \in W^{1,r_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sei E die Menge aller Exponenten $r \in [r_1, r_2]$, für die $f \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist. Es soll gezeigt werden, daß E im Intervall $[r_1, r_2]$ sowohl abgeschlossen als auch offen ist.

Für jedes $r \in E$ gilt mit Abschätzung (8.1) aus Theorem 2

$$\|\varphi Df\|_r \;\le\; C(n,K)\,\|\,|\nabla\varphi|\,|f - f_0|\,\|_r\,, \tag{9.1}$$

mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und f_0 einem beliebigen Vektor in $\mathbb{R}^n$. Sei $B = B(x_0, \varrho)$ eine beliebige Kugel um x_0 mit $2B = B(x_0, 2\varrho) \subset 2\bar{B} \subset \Omega$. Weiter sei f_0 jetzt fest gewählt als f_{2B}, dem L^1-Mittelwert von f über $2B$ und $\varphi \in C_0^\infty(2B)$ mit $\varphi|_B = 1$ und $|\nabla\varphi| \le \frac{2}{\varrho}$ (vergleiche hierzu den Beweis zu Lemma 2.19). Damit folgt aus (9.1)

$$\begin{aligned}
\left(⨍_B |Df|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\le \frac{2}{\varrho}\,C(n,K)\left(⨍_B |f - f_{2B}|^r\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\le \frac{2}{\varrho}\,2^{\frac{n}{r}}\,C(n,K)\left(⨍_{2B} |f - f_{2B}|^r\right)^{\frac{1}{r}}\,.
\end{aligned}$$

Darauf die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung (1.1) angewandt, mit $p = \frac{nr}{n-1}$ und $q = nr$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, ergibt mit $r > 1$

$$\left(⨍_B |Df|^r\right)^{\frac{1}{r}} \le 2^{1+n}\,C(n,K)\,\frac{1}{\varrho}\left(⨍_{2B} |f - f_{2B}|^{\frac{nr}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{nr}}\,. \tag{9.2}$$

Mit dem Poincaré-Sobolev Lemma (1.10), siehe auch [Re1], erhält man

$$\left(⨍_{2B} |f - f_{2B}|^{\frac{nr}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{nr}} \le \Omega_n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{nr}{n-1} + 3^n\right)\varrho\left(⨍_{2B} |Df|^{\frac{nr}{n+r-1}}\right)^{\frac{n+r-1}{nr}}\,, \tag{9.3}$$

dabei bezeichnet Ω_n den Inhalt der n-dimensionalen Einheitskugel. Für die Exponenten der Integrabilität gilt

$$\mu \;=\; \frac{nr}{n+r-1} \;<\; n$$

und

$$\bar{\mu} \;=\; \frac{\mu n}{n-\mu} \;=\; \frac{nr}{n+r-1}\,\frac{n}{n-\frac{nr}{n+r-1}} \;=\; \frac{nr}{n-1}\,.$$

Nimmt man (9.2) und (9.3) zusammen, folgt

$$\left(\fint_B |Df|^r\right)^{\frac{1}{r}} \;\leq\; A(n,K)\,\left(\fint_{2B} |Df|^{\frac{nr}{n+r-1}}\right)^{\frac{n+r-1}{nr}} \tag{9.4}$$

mit

$$A(n,K) \;=\; \Omega_n^{\frac{1}{n}}\,C(n,K)\,2^{1+n}\left(\frac{nr}{n-1}+3^n\right)\,.$$

Da $1 < r \leq r_2$, hat $A(n,K)$ eine feste obere Schranke unabhängig von r. Damit folgt aus (9.4), daß E in $[r_1,r_2]$ abgeschlossen ist.

Mit $\frac{nr}{n+r-1} < r$, ist (9.4) eine sogenannte schwache inverse Hölder-Ungleichung. Damit lassen sich die Ergebnisse aus Abschnitt 6.2 anwenden.

Um die Offenheit von E zu zeigen, verwendet man folgende Version von Satz 6.19.

Lemma 9.1 *Sei $0 < s < r$ und $h \in L^r_{\text{loc}}(\Omega)$ erfülle die schwache inverse Hölder-Ungleichung*

$$\left(\fint_B |h|^r\right)^{\frac{1}{r}} \;\leq\; A\,\left(\fint_{2B} |h|^s\right)^{\frac{1}{s}} \tag{9.5}$$

für alle Kugeln B mit $2\bar{B} \subset \Omega$ und einer Konstanten A unabhängig von B, dann existiert ein $r' > r$ mit $h \in L^{r'}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Nach (9.4) erfüllt Df eine solche schwache inverse Hölder-Ungleichung. Folglich liegt f in $W^{1,r'}_{\text{loc}}(\Omega, I\!\!R^n)$ für ein $r' > r$. Anders ausgedrückt folgt aus $r \in E$ mit $r < r_2$, daß $r' \in E$ für ein $r' > r$, $r' \leq r_2$ und damit die Offenheit von E im Intervall $[r_1, r_2]$. Die einzigen sowohl offenen als auch abgeschlossenen Teilmengen sind die leere und die ganze Menge. Da $r_1 \in E$ muß $E = [r_1, r_2]$ sein und die Behauptung ist gezeigt.

$\square$

10 Hebbarkeit unter beschränkten quasiregulären Abbildungen

10.1 Hausdorff-Dimension und Kapazität

Um Theorem 4 formulieren zu können, bedarf es der Klärung einiger Begriffe, vergleiche [G] S.276, [IM3] S.103 und [Vu] S.82.

Definition 10.1 *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und D die Menge aller abzählbaren Überdeckungen $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von E, mit $d(E_j) = \sup_{x,y\in E_j}\{|x-y|\} < r$ für alle j und $r > 0$. Damit ist für $\alpha \in (0,\infty)$ das α-dimensionale Hausdorff-Maß von E definiert durch*

$$H_\alpha(E) := \lim_{r\to 0}\left(\inf_D \sum_j d(E_j)^\alpha\right) . \tag{10.1}$$

Die Hausdorff-Dimension von E ist definiert durch

$$\dim_H(E) := \inf\{\alpha \mid H_\alpha(E) = 0\} . \tag{10.2}$$

Bemerkung. Aus $\dim_H(E) < \alpha$ folgt direkt aus der Definition, daß $H_\alpha(E) = 0$ ist. Umgekehrt folgt aus $\dim_H(E) > \alpha$, daß dann $H_\alpha(E) = \infty$ gilt. Für $\alpha = n$ stimmt das α-dimensionale Hausdorff-Maß mit dem n-dimensionalen Lebesgue-Maß überein.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $E \subset \Omega$ kompakt, dann wird das Paar (E,Ω) oft auch Kondensator genannt.

Definition 10.2 *Die p-Kapazität, $1 < p < \infty$, des Kondensators (E,Ω) ist definiert durch*

$$p\text{-cap}\,(E,\Omega) := \inf\left\{\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^p dx\right\} , \tag{10.3}$$

wobei das Infimum über alle Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ genommen wird, die in einer Umgebung von E identisch eins sind.

Bemerkung. Eine kompakte Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ hat die p-Kapazität null ($p\text{-cap}\,(E) = 0$), wenn es eine offene Menge Ω gibt, mit $E \subset \Omega$ und $p\text{-cap}\,(E,\Omega) = 0$. Eine abgeschlossene Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ hat die p-Kapazität null, wenn jede kompakte Teilmenge von E die p-Kapazität null hat.

Lemma 10.3 *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige abgeschlossene Menge, dann gilt*

(i) $\dim_H(E) = n - \sup\{p \mid p\text{-cap}\,(E) = 0\}$.

(ii) *Ist $p\text{-cap}\,(E) = 0$ für $1 < p < n$, ist auch $H_\alpha(E) = 0$ für $\alpha > n - p$.*

(iii) *Ist* $\dim_H(E) < \alpha$ *mit* $1 < \alpha < n$, *ist auch* $(n-\alpha)\text{-cap}\,(E) = 0$.

Zum Beweis von (i) siehe [IM3] S.103, zu (ii) [Re1] S.120, zu (iii) [Vä].

Das folgende Korollar ergibt sich aus Definition 10.2 der p-Kapazität und aus Lemma 10.3.

Korollar 10.4 *Hat eine kompakte Menge* $E \subset I\!R^n$ *die p-Kapazität null,* $1 < p \leq n$, *dann gibt es eine Folge* $\{\eta_j\}_{j\in I\!N}$ *von Funktionen* $\eta_j(x) \in C_0^\infty(I\!R^n)$, *so daß*

$$\text{(i)} \qquad 0 \leq \eta_j(x) \leq 1 \,, \tag{10.4}$$

$$\text{(ii)} \qquad \eta_j = 1 \quad \textit{in einer Umgebung } U_j \textit{ von } E \,, \tag{10.5}$$

$$\text{(iii)} \qquad \lim_{j\to\infty} \eta_j(x) = \chi_E(x) \quad \textit{für alle } x \in I\!R^n \,, \tag{10.6}$$

$$\text{(iv)} \qquad \lim_{j\to\infty} \|\nabla\eta_j(x)\|_p = 0 \,. \tag{10.7}$$

10.2 Quasiregularität und Hebbarkeit

Eine abgeschlossene Menge $E \subset I\!R^n$ ist hebbar unter beschränkten K-quasiregulären Abbildungen, wenn für jede offene Menge $\Omega \subset I\!R^n$ jede beschränkte K-quasireguläre Abbildung $f : \Omega \setminus E \to I\!R^n$ zu einer K-quasiregulären Abbildung auf Ω fortgesetzt werden kann. In [IM1] wurde bereits eine Hebbarkeitsaussage bewiesen, allerdings nur für quasireguläre Abbildungen in geraden Dimensionen. Theorem 4 kann damit auch als Verallgemeinerung von Theorem 5 aus [IM1] angesehen werden.

Theorem 4 *Für jede Dimension* $n = 2, 3, \ldots$ *und* $K \geq 1$ *gibt es ein* $\alpha = \alpha(n,K) > 0$, *so daß jede abgeschlossene Menge* $E \subset I\!R^n$ *mit der Hausdorff-Dimension* $\dim_H(E) < \alpha$ *unter beschränkten* K*-quasiregulären Abbildungen hebbar ist.*

Beweis. Sei $r = r_1(n,K)$, $1 < r < n$, der kleinere Exponent aus Theorem 2 und

$$\alpha = \alpha(n,K) = n - r \,. \tag{10.8}$$

Sei weiter $\Omega \subset I\!R^n$ offen und $f : \Omega \setminus E \to I\!R^n$ eine beschränkte K-quasireguläre Abbildung, mit der abgeschlossenen Menge $E \subset I\!R^n$ und $\dim_H(E) < \alpha$. Aus Lemma 10.3 (iii) und mit (10.8) folgt

$$r\text{-cap}\,(E) = 0 \,. \tag{10.9}$$

Mit Lemma 10.3 (ii) ist E eine Menge mit Lebesgue-Maß null ($|E| = 0$), daher kann $f : \Omega \to I\!R^n$ als eine im wesentlichen beschränkte meßbare Abbildung angenommen werden. Es soll gezeigt werden, daß $f \in W^{1,r}_{\text{loc}}(\Omega, I\!R^n)$.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Da jede kompakte Teilmenge von E die r-Kapazität null hat, existiert eine Folge $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ wie in Korollar 10.4. Mit

$$\varphi_j \;=\; (1 \,-\, \eta_j)\varphi \tag{10.10}$$

ist $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega \setminus E)$ und es gilt

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi_j| &= |(1-\eta_j)\nabla\varphi \,-\, \varphi\nabla\eta_j)| \\ &\le |\nabla\varphi| \,+\, |\varphi|\,|\nabla\eta_j|\,. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Weiter gilt

$$|D(\varphi_j f)| \;\le\; |\varphi_j Df| \,+\, |f|\,|\nabla\varphi_j|\,. \tag{10.12}$$

Da die Abbildung $f : \Omega \setminus E \to \mathbb{R}^n$ quasiregulär ist, folgt $f \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus E)$. Mit Abschätzung (8.1) aus Theorem 2, mit (10.11) und (10.12) gilt

$$\begin{aligned} \|D(\varphi_j f)\|_r &\le \|\varphi_j\, Df\|_r \,+\, \|\,|f|\,|\nabla\varphi_j|\,\|_r \\ &\le (C(n,K)+1)\,\|\,|f|\,|\nabla\varphi_j|\,\|_r \\ &\le (C(n,K)+1)\,\left(\|\,|f|\,|\nabla\varphi|\,\|_r \,+\, \|\,|\varphi f|\,|\nabla\eta_j|\,\|_r\right)\,. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Da f im wesentlichen beschränkt ist und φ_j für $j \to \infty$ fast überall gegen φ konvergiert, konvergiert $\varphi_j f$ gegen φf in $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Mit Eigenschaft (10.7) aus Korollar 10.4 gilt

$$\varphi f|\nabla\eta_j| \;\to\; 0 \tag{10.14}$$

in $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ für j gegen ∞. Dies ergibt zusammen mit (10.13), daß die Normen $\|D(\varphi_j f)\|_r$ beschränkt bleiben für alle j. Damit konvergiert $\varphi_j f$ gegen φf in $W^{1,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Mit (10.14) erhält man

$$\|D(\varphi f)\|_r \;\le\; (1 + C(n,K))\,\|\,|f|\,|\nabla\varphi|\,\|_r\,. \tag{10.15}$$

Die Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ war beliebig, damit ist $f \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und wegen $|E| = 0$ auch schwach K-quasiregulär in Ω. Mit Theorem 3 kann man die Quasiregularität von $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folgern, und die Behauptung ist gezeigt.

□

11 Anhang

Es werden einige Definitionen und Folgerungen aus der Theorie der singulären Integraloperatoren zusammengestellt, die vor allem im Beweis zum Hodge-Zerlegungssatz (Abschnitt 2.4) benötigt werden. Definitionen, Lemmata und Beweise finden sich in [St] Kapitel 2,3 und 5.

11.1 Fourier-Transformation

Definition 11.1 *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fourier-Transformierte $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von f definiert durch*

$$\hat{f}(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x,y \rangle} f(x)dx \tag{11.1}$$

mit $y \in \mathbb{R}^n$ und $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung. Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, liegt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|\hat{f}\|_2 \;=\; \|f\|_2 \;. \tag{11.2}$$

Definition 11.1 kann stetig auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ erweitert werden.

Folgerungen. Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} \tag{11.3}$$

und die Parseval-Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f g \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \hat{g} \;\;. \tag{11.4}$$

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann hat die Fourier-Transformierte von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die Form $-2\pi i x_i \hat{f}$. Daraus folgt

$$(\Delta f)\hat{}\,(x) \;=\; 4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x) \;. \tag{11.5}$$

Definition 11.2 *Sei $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ eine lineare Transformation. Gilt für eine beschränkte, meßbare Funktion $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$(Tf)\hat{}\,(x) \;=\; m(x)\hat{f}(x) \tag{11.6}$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, wird m Fourier-Multiplikator von T genannt.

Bemerkung. Ein beschränkter linearer Operator $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ vertauscht mit Translationen genau dann, wenn ein Fourier-Multiplikator m von T existiert.

11.2 Singuläre Integraloperatoren

Singuläre Integraloperatoren sind oft hilfreich bei der Lösung linearer partieller Differentialgleichungen. Fundamental in der Theorie ist die sogenannte Hilbert-Transformation.

Definition 11.3 *Für $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$, ist die Hilbert-Transformation Hf von f definiert durch*

$$(Hf)(x) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy\,. \tag{11.7}$$

Der Operator $H : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ ist beschränkt.

Die Riesz-Transformation ist eine höherdimensionale Verallgemeinerung der Hilbert-Transformation.

Definition 11.4 *Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, sind die Riesz-Tranformationen $R_1, ..., R_n$ definiert durch*

$$(R_j f)(x) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} c_n \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\, dy \tag{11.8}$$

mit

$$c_n \;=\; \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}$$

und der Gamma-Funktion

$$\Gamma(z) \;=\; \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt\,.$$

Für $n = 1$ entspricht R_1 der Hilbert-Transformation. Die Operatoren R_j sind beschränkt, alle mit der gleichen L^p-Norm A_p .

Lemma 11.5 *Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $j = 1, ..., n$ gilt*

$$(R_j f)\hat{}\,(x) \;=\; i\,\frac{x_j}{|x|}\hat{f}(x)\,, \tag{11.9}$$

das heißt, $i\,\frac{x_j}{|x|}$ ist der Fourier-Multiplikator von R_j.

Für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $D_{jk}f = R_j R_k \Delta f$, wie auch in (2.29) gezeigt wurde. Mit der Beschränktheit von R_j folgt

$$\|D_{jk}f\|_p \;\leq\; A_p \|R_k \Delta f\|_p \;\leq\; A_p^2 \|\Delta f\|_p \,. \tag{11.10}$$

Aus dem Gedanken (11.5) zu der allgemeinen Beziehung

$$(\Delta^{\frac{\beta}{2}} f)\hat{} \;=\; (2\pi |x|)^{\beta} \hat{f} \quad , \; -n < \beta < 0 \,,$$

zu erweitern, resultiert der Begriff des Riesz-Potentials.

Definition 11.6 *Der Operator $I_\eta(f) = \Delta^{-\frac{\eta}{2}} f$, $0 < \eta < n$, wird als Riesz-Potential bezeichnet und hat die Integraldarstellung*

$$I_\eta(f)(x) \;=\; \frac{1}{\gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\eta}}\, dy \;=\; \frac{1}{\gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\eta}}\, dy \tag{11.11}$$

mit

$$\gamma(\eta) \;=\; \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\eta}\, \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\eta}{2}\right)} \,.$$

Gebraucht wird in Abschnitt 2 das Riesz-Potential für $\eta = 2$.

An dieser Stelle ist es nützlich an den Schwartz-Raum zu erinnern. Im Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegen alle Funktionen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, die der Bedingung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \;<\; \infty$$

für alle Multiindizes α, β genügen. Es gilt $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p \leq \infty$. Die Gleichungen (11.3) und (11.4) behalten ihre Gültigkeit für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 11.7 *Für $0 < \eta < n$ und $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} I_\eta(f)(x)\, g(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi|x|)^\eta} \hat{f}(x)\, \hat{g}(x)\, dx \,. \tag{11.12}$$

Bemerkung. Mit (11.4) kann (11.12) so interpretiert werden, daß $x \mapsto \frac{1}{(2\pi|x|)^\eta}\hat{f}(x)$ die Fourier-Transformierte von $I_\eta(f)$ ist.

11.3 Weyls Lemma

Das folgende Lemma von Weyl ist zum Beispiel in [I2] bewiesen.

Lemma 11.8 *Ist* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *und gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x)\, \psi(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \Delta\psi(x)\, dx \;=\; 0 \tag{11.13}$$

für alle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, dann existiert eine im üblichen Sinne harmonische Funktion* v*, mit* $v = u$ *fast überall.*

Literatur

[BaC] C. Baiocchi, A.Capelo: *Variational and quasivariational inequalities,* John Wiley and Sons, Chichester – New York, 1984.

[BI] B.V. Bojarski, T. Iwaniec: *Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in* $\mathbb{R}^n$*,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. 8 (1983), 257-324.

[Da] B. Dacorogna: *Direct methods in the calculus of variations,* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1989.

[Fla] H. Flanders: *Differential forms,* Academic Press, New York – London, 1963.

[FS] C. Fefferman, E.M. Stein: H^p*-spaces of several variables,* Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[G] F.W. Gehring: *The* L^p*-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping,* Acta Math. 130 (1973), 265-277.

[GoR] V.M. Gol'dshtein, Yu.G. Reshetnyak: *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces,* Kluwer Academic Publishers, 1990.

[Gr] H. Grötzsch: *Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes,* Ber. Verh. Sächsischen Akad. Wiss. Leipzig 80 (1928), 503-507.

[He] E. Heil: *Differentialformen und Anwendungen auf Vektoranalysis, Differentialgleichungen, Geometrie,* Wissenschaftsverlag (B.I.), Mannheim – Wien – Zürich, 1974.

[HR] H. Holmann, H. Rummler: *Alternierende Differentialformen,* Wissenschaftsverlag (B.I.), Mannheim – Wien – Zürich, 1972.

[I1] T. Iwaniec: *p-harmonic tensors and quasiregular mappings,* Ann. of Math. (2) 136 (1992), 589-624.

[I2] T. Iwaniec: *On quasiconformal mappings,* Lectures given at Syracuse University, 1987-1988.

[I3] T. Iwaniec: L^p*-theory of quasiregular mappings,* in: M. Vuorinen (Ed.) *Quasiconformal space mappings,* Lecture Notes in Mathematics 1508, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York (1992), 39-64.

[IM1] T. Iwaniec, G.J. Martin: *Quasiregular mappings in even dimensions,* Acta Math. 170 (1993), 29-81.

[IM2] T. Iwaniec, G.J. Martin: *The Beurling-Ahlfors transform in $I\!R^n$ and related singular integrals,* Preprint, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1990.

[IM3] T. Iwaniec, G.J. Martin: *Quasiconformal mappings and capacity,* Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), 101-122.

[IS] T. Iwaniec, C. Sbordone: *Weak minima of variational integrals,* Preprint, University of Naples, 1992.

[La] M.A. Lavrentieff: *Sur une classe de représentations continues,* Rec. Math. 48, 407-423 (1935).

[LV] O. Lehto, K.I. Virtanen: *Quasiconformal mappings in the plane,* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1965.

[Ma] G.V. Maz'ja: *Sobolev spaces,* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, 1985.

[Mo] C.B. Morrey, Jr.: *On the solution of quasilinear elliptic partial differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126-166.

[Mü] C. Müller: *Spherical Harmonics,* Lecture Notes in Mathematics 17, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1966.

[Mun] M.E. Munroe: *Measure and integration,* Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

[Po] H.P. Pohl: *Über quasireguläre Abbildungen in geraden Dimensionen: Die Verallgemeinerung der Beltramischen Differentialgleichung,* Freie Universität Berlin, Fachbereich Mathematik, Diplomarbeit (1992).

[Rek] K. Rektorys: *Variationsmethoden in Mathematik, Physik und Technik,* Hanser Verlag, München – Wien, 1985 .

[Re1] Yu.G. Reshetnyak: *Space mappings with bounded distortion,* Translations of Mathematical Monographs 73, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1989.

[Re2] Yu.G. Reshetnyak: *The Liouville theorem with minimal regularity conditions,* Sibir. Math. J. 8 (1967), 835-840.

[Ri1] S. Rickman: *Quasiregular mappings,* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1993.

[Ri2] S. Rickman: *On quasiregular mappings,* Lectures given at Helsinki University, 1992.

[St] E.M. Stein: *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[Vä] J. Väisälä: *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings,* Lecture Notes in Mathematics 229, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1971.

[Vu] M. VUORINEN: *Conformal geometry and quasiregular mappings,* Lecture Notes in Mathematics 1319, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1988.

[W] I. WIK: *A comparison for the integrability of f and Mf with that of $f^{\#}$,* Preprint Series No. 2 (1983), Department of Mathematics, University of Umeå, Sweden.