7.2 Diagonalisierung

VL#29

a) Eigenraumzerlegung

<u>Satz:</u> (Eigenraumzerlegung)
Sei $\dim V = n < \infty$. Für $f \in \mathrm{End}(V)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ haben wir die Zerlegung

$$V = \mathrm{Eig}(f;\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f;\lambda_k) \oplus U$$

mit einem geeigneten Untervektorraum U. Für $r_i := \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda_i)$ gilt: $\sum_{i=1}^{k} r_i \le n$. Umfassen die $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle Eigenwerte von f, so gilt Gleichheit (bzw. $\dim U = 0$) genau dann, wenn f diagonalisierbar ist.

<u>Bew.:</u> $\mathrm{Eig}(f;\lambda_i)$ sind Untervektorräume von V.
Nach dem Lemma §7.1c ist $(u_1, \dots, u_k)$ linear unabhängig für alle Wahlen von $u_i \in \mathrm{Eig}(f;\lambda_i) \setminus \{0\}$.
$\Rightarrow$ direkte Summe $W := \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Eig}(f;\lambda_i)$ (Proposition in §2.3b)
[$\mathrm{Eig}(f;\lambda_i) \cap \mathrm{Eig}(f;\lambda_j) = \{0\}$ für $i \neq j$ reicht nicht!]
Dann gibt es $U \subset V$ mit $V = W \oplus U$.
Zu $\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$ gibt es Basen $(v_1^{(i)}, \dots, v_{r_i}^{(i)})$ für $i = 1, \dots, k$. Also haben wir $\sum_{i=1}^{k} r_i =: m$ linear unab-

hängige Eigenvektoren. Es gilt $m \leq \dim V$, und bei Gleichheit bilden sie eine Eigenbasis. $\Rightarrow f$ ist diagonalisierbar. Umkehrung: Eigenbasis liefert die Zerlegung.

$\square$

<u>Bem.:</u>

(1) Beispiele: Projektion und Drehung in $\mathbb{R}^3$ (§7.16)

(2) Wann läßt sich der „Rest" U so wählen, daß er f-invariant ist?

Ergänze die Eigenvektoren aus dem Beweis zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V. Darstellende Matrix von f:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{cc|c} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}^{r_1} & \overbrace{\quad 0 \quad}^{r_k} & \overbrace{\quad B \quad}^{\dim U = n-m} \\ 0 & \begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{matrix} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & D \end{array}\right)$$

Basisvektoren aus Eigenvektoren — Basisvektoren von U

$\Rightarrow U$ ist f-invariant, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ gibt, in der $B = 0$.

Beispiel: f ist selbstadjungiert und $\mathcal{B}$ ist Orthonormalbasis, dann ist $M_{\mathcal{B}}(f)$ symmetrisch/hermitesch. Ist dieses $\mathcal{B}$ mit der Eigenraumzerlegung verträglich?

b) Diagonalisierbarkeit

Proposition:
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim V = n < \infty$. Dann gilt:

(i) Ist f diagonalisierbar, dann zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, d.h.
$$P_f = \pm(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_n).$$

(ii) Ist $P_f = \pm(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, dann ist f diagonalisierbar.

Bew.: (i) Berechne P_f für Eigenbasis zu f.
(ii) Eigenraumzerlegung (§7.2a) $\square$

Def.: Ist λ eine μ-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms P_f von $f \in \mathrm{End}(V)$, so sagen wir, der Eigenwert λ hat die algebraische Vielfachheit $\mu = \mu(P_f;\lambda)$.

Lemma: Ist λ Eigenwert von f, so gilt
$$1 \leq \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda) \leq \mu(P_f;\lambda).$$

Bew.: Sei $(v_1, \dots, v_r)$ Basis von $\mathrm{Eig}(f;\lambda)$. Da λ Eigenwert ist, ist $r \geq 1$. Ergänze zu Basis $\mathcal{B}$ von V.
Dann ist

$$A := M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right) \Big\} r\text{-mal}$$

$P_A = \det(A - t\,\mathbb{1}_n) = (\lambda - t)^r \, P_{A'}$. (§5.1b)

$\Rightarrow r \leq \mu(P_A;\lambda)$, da λ auch Nullstelle von $P_{A'}$ sein kann.

$\square$

Satz: (Diagonalisierbarkeit)

Sei $\dim V = n < \infty$. Dann ist $f \in \mathrm{End}(V)$ genau dann diagonalisierbar, wenn

(i) das charakteristische Polynom P_f in Linearfaktoren zerfällt und

(ii) die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ übereinstimmen,

d.h. $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ mit $r_i := \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda_i) = \mu(P_f;\lambda_i)$ für $i = 1, \dots, k$.

Bew.: $\Rightarrow$: Ist $r_i := \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda_i)$, so folgt nach Satz 7.2a (Eigenraumzerlegung): $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. Die Eigenwerte λ_i sind Nullstellen von P_f mit $s_i := \mu(P_f;\lambda_i)$. Wegen $1 \leq r_i \leq s_i^{(1)}$ und $\sum_{i=1}^{k} s_i \leq n^{(2)}$ folgt $n = \sum_i r_i \leq \sum_i s_i \leq n$, also muß $r_i = s_i$ für $i = 1, \dots, k$ sein.

[1] Lemma, [2] $\deg P_f = n$

Wegen $\deg P_f = n$ folgt $P_f = \pm\prod_{i=1}^{k} (t-\lambda_i)^{s_i}$.

$\Leftarrow$: Für $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ ist in Satz 7.2a $\dim U = 0$.

$\square$

Bem.:

(1) Kriterium (i) ist für $K=\mathbb{C}$ immer gegeben, da jedes komplexe Polynom in Linearfaktoren zerfällt. (§7.1e)

(2) für ein allgemeines Polynom ($n=5, 10, 100, \ldots$) ist die Bestimmung aller Nullstellen nur numerisch möglich (z.B. Intervall-Newton-Verfahren)

(3) Das Kriterium ist leider nicht sehr handlich, im allgemeinen Fall können wir die (Nicht-)Diagonalisierbarkeit erst „unterwegs" feststellen, d.h. bei der Berechnung der Eigenräume.

(4) numerisch werden iterative Verfahren bevorzugt, z.B. Potenzmethode oder Arnoldi-Iteration

$x_0 \in V$ mit $\|x_0\|=1$ beliebig, $x_{n+1} := \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|}$ konvergiert gegen Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert.

c) simultane Diagonalisierung

Seien $f, g \in End(V)$ diagonalisierbar. Wann läßt sich eine Basis finden, die gleichzeitig Eigenbasis von sowohl f als auch g ist?

Bsp.: $A, B \in K^{n \times n}$ mit $S \in GL(n; K)$, so daß
$SAS^{-1} = D$, $SBS^{-1} = \tilde{D}$ Diagonalmatrizen sind.
Wegen $D\tilde{D} = \tilde{D}D$ ist $AB = BA$ eine notwendige Bedingung für simultane Diagonalisierbarkeit.
„A und B kommutieren."

Bew.: $$AB = S^{-1}D\underbrace{SS^{-1}}_{\mathbb{1}}\tilde{D}S \underset{D\tilde{D} = \tilde{D}D}{=} S^{-1}\tilde{D}\underbrace{SS^{-1}}_{\mathbb{1}}DS = BA.$$ $\square$

Satz: Zwei diagonalisierbare $f, g \in End(V)$ sind genau dann simultan diagonalisierbar, d.h. es gibt eine gemeinsame Eigenbasis, wenn $f \circ g = g \circ f$.

Bew.: Nach Voraussetzung haben wir die Zerlegungen

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Eig}(f; \lambda_i) = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathrm{Eig}(g; \mu_j).$$

Eigenwerte von f bzw. g

i) Fixiere $\lambda = \lambda_i$ und zeige: $W := \mathrm{Eig}(f; \lambda)$ ist g-invariant.

$$w \in W \Rightarrow f(g(w)) \overset{f\circ g = g\circ f}{=} g(f(w)) = g(\lambda w) = \lambda\, g(w)$$

$$\Rightarrow g(w) \in W.$$

ii) Setze $W_j := W \cap \mathrm{Eig}(g; \mu_j)$ für $j = 1, \dots, \ell$ und zeige: $W = \bigoplus_{j=1}^{\ell} W_j$. Dann hat W eine Basis aus Eigenvektoren von g, dies gilt für alle $\mathrm{Eig}(f; \lambda_i)$.

Zu $w \in W \subset V$ gibt es eindeutige $w_j \in \mathrm{Eig}(g; \mu_j)$, so daß $w = \sum_{j=1}^{\ell} w_j$. Also: $\sum_{j=1}^{\ell} f(w_j) = f(w) = \lambda w = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda w_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\ell} [\underbrace{f(w_j) - \lambda w_j}_{\in\, \mathrm{Eig}(g;\mu_j)}] = 0.$$

Da $\mathrm{Eig}(g; \mu_j)$ auch f-invariant ist, folgt aus der Eindeutigkeit der direkten Summe, daß $f(w_j) = \lambda w_j$, $j = 1, \dots, \ell$.

$\Rightarrow w_j \in W$. Also gibt es zu jedem $w \in W$ eindeutige $w_j \in W_j$ mit $w = \sum_{j=1}^{\ell} w_j$. $\Rightarrow W = \bigoplus_{j=1}^{\ell} W_j$.

Umkehrung: Sind f, g simultan diagonalisierbar, dann vertauschen die zugehörigen Matrizen (s.o.) $\Rightarrow f \circ g = g \circ f$. $\square$