4.4 Basiswechsel

Die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ hängt von der Wahl der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ab. Wie ändert sich die Matrix unter Basiswechsel $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$?

a) Koordinatentransformation

<u>Bem.:</u>

(1) Seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{A}' = (v_1', \dots, v_n')$ Basen von V und $\Phi_{\mathcal{A}}, \Phi_{\mathcal{A}'} : K^n \to V$ die zugehörigen Koordinatenabbildungen. Dann hat man ein Diagramm von Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\underset{\text{alte Koordinaten}}{K^n} \arrow[rr, "T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} := \Phi_{\mathcal{A}'}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & & \underset{\text{neue Koordinaten}}{K^n} \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{A}'}"] \\
& \underset{\text{abstrakte Vektoren}}{V} &
\end{tikzcd}$$

Die Matrix $T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} \in GL(n;K)$ ist invertierbar (§3.2(7)) und heißt **Transformationsmatrix** des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$.

(2) für $v \in V$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ und $v = \sum_{j=1}^{n} x_j' v_j'$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$ transformiert die Koordinaten.

(3) Fall $V=K^n$: Konstruiere aus $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ $n\times n$-Matrizen $A=(v_1,\dots,v_n)$ und $A'=(v_1',\dots,v_n')$. Dann ist $\Phi_{\mathcal{A}}(x)=Ax$ und $\Phi_{\mathcal{A}'}$ analog, so daß gilt:

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & K^n \arrow[dl, "A'"] \\ & K^n & \end{tikzcd} \qquad \text{mit } T=(A')^{-1}A.$$

Ist $\mathcal{A}=(e_1,\dots,e_n)$, so folgt $T=(A')^{-1}$. $\quad (A=\mathbb{1}_n)$

(4) Bsp.: $V=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}=(e_1,e_2)$, $\mathcal{A}'=(v_1',v_2')=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$

$$\Rightarrow A'=\begin{array}{c} \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} \\ \;\; v_1' \;\; v_2' \end{array} \Rightarrow (A')^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=T.$$

Für $v=-e_1+e_2$ ist $x=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, also $x'=Tx=\begin{pmatrix}-4/5\\3/5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow v=-\frac{4}{5}v_1'+\frac{3}{5}v_2'$

(5) für den allgemeinen Fall wie in Bem. (1) betrachte die Matrix $S=(s_{ij})\in K^{n\times n}$ mit $v_j'=\sum_{i=1}^{n}s_{ij}v_i$.
(Koeffizienten der neuen Basisvektoren als Spalten)

Es gilt $\Phi_{\mathcal{A}'}=\Phi_{\mathcal{A}}\circ S$, also $S=\Phi_{\mathcal{A}}^{-1}\circ\Phi_{\mathcal{A}'}=(T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'})^{-1}$

$\Rightarrow T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}=S^{-1}$. Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & & K^n \arrow[ll, "S"'] \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{A}'}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Bew.:

Spalte j von S

$$(\Phi_{\mathcal{A}}\circ S)(e_j)\overset{1}{=}\Phi_{\mathcal{A}}\left(\begin{pmatrix}s_{1j}\\ \vdots\\ s_{nj}\end{pmatrix}\right)\overset{2}{=}\sum_{i=1}^{n}s_{ij}v_i\overset{3}{=}v_j'\overset{4}{=}\Phi_{\mathcal{A}'}(e_j),\quad j=1,\dots,n.$$

[1] Matrixprodukt, [2] Def. $\Phi_{\mathcal{A}}$, [3] Def. (s_{ij}), [4] Def. $\Phi_{\mathcal{A}'}$ $\square$

b) Transformationsformel

<u>Satz:</u> (Transformationsformel)
Ist $f: V \to W$ linear, und sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W, so ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dd, "T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}"'] & & & K^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dd, "T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{A}'}"'] \arrow[rrr, "M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f)"'] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{B}'}"]
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt:

$$M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \overset{(T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'})^{-1}}{\overset{\parallel}{T^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}}}.$$

<u>Bew.:</u> Die viereckigen und dreieckigen Teile des Diagramms sind kommutativ. Also ist das gesamte Diagramm kommutativ, und die Transformationsformel läßt sich ablesen.

- Vierecke: darstellende Matrizen von f [§4.3c (3)]
- Dreiecke: Basiswechsel in V bzw. W. [§4.4a (1)]

$\square$

Bem.:

(1) Sind $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $\tilde{A} = M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ die Matrizen von f und $T = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}$, $S = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ Transformationsmatrizen, dann gilt also:

$$\boxed{\tilde{A} = SAT^{-1}.}$$

(2) Für Endomorphismen $(W=V)$ möchte man auch $\mathcal{A} = \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ setzen, also

$$M_{\mathcal{B}}(f) : \operatorname{End}(V) \to K^{n \times n}, \quad f \mapsto A = (a_{ij})$$

mit $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ für $j = 1, \dots, n$.

(3) Korollar: Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann ist $M_{\mathcal{B}'}(f) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}}(f) T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$, oder anders ausgedrückt: $\tilde{A} = SAS^{-1}$

für $A := M_{\mathcal{B}}(f)$, $\tilde{A} := M_{\mathcal{B}'}(f)$, $S := T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$.

(4) Mit zwei Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ können wir zu jeder linearen Abbildung eine Matrix in Diagonalform angeben. Sogar: $A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Für $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ gilt aber $M_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = \mathbb{1}_n$.

Unter welchen Umständen läßt sich $M_B(f)$ für allgemeines $f \in \mathrm{End}(V)$ auf eine einfache Form (z.B. Diagonalgestalt) bringen?
($\hookrightarrow$ Eigenwerte, Klassifikation von Matrizen)

(5) Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
Basis $B = (e_1, e_2)$, dann ist $A = M_B(f) = \begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -4\end{pmatrix}$.

Wechsel zu Basis $B' = \left(v_1' = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\right)$:

Transformationsmatrix: $S = T^B_{B'} = \begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M_{B'}(f) = \tilde{A} = S A S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Probe:
$$f(v_1') = f(e_1 + 2e_2) = f(e_1) + 2f(e_2) = -3(e_1 + 2e_2) = -3v_1'$$
$$f(v_2') = f(-2e_1 - e_2) = -2\left[f(e_1) + \tfrac{1}{2}f(e_2)\right] = 0$$

(6) Transformationsformeln für $A \in K^{n \times n}$, $x \in K^n$:
sei $S \in GL(n; K)$. Wegen $SS^{-1} = \mathbb{1}_n$ gilt:
$$y = Ax \Leftrightarrow Sy = SAS^{-1}Sx \Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x} \text{ mit}$$
$$\tilde{x} = Sx,\ \tilde{y} = Sx \text{ und } \tilde{A} = SAS^{-1}.$$

(7) Beispiel 2: $V = \mathbb{R}[t]_3$, reelle Polynome bis Grad 3

- Abbildung $D: \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_3$, $P(t) \mapsto \frac{d}{dt} P(t)$

Ableitung

- Basis $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$
- darstellende Matrix:

$$M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{array}$$

$D(1) = 0$ $\quad$ $D(t^2) = 2t$

- neue Basis: $\mathcal{B}' = (1,\ 1+t,\ \underbrace{t + \tfrac{1}{2}t^2}_{v_3'},\ \underbrace{\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3}_{v_4'})$
- Transformationsmatrix:

$$\left(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1} =: S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

⚠ S wie in §4.4b(1), nicht wie §4.4a(5).

Koeffizienten von v_3' bzgl. $\mathcal{B}$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}'}(D) = S \cdot M_{\mathcal{B}}(D) \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten von $D(v_3')$ bzgl. $\mathcal{B}'$

z.B.: $D(v_3') = \frac{d}{dt}\left(t + \frac{1}{2}t^2\right) = 1 + t = v_2'$