7.3 Normale Endomorphismen

a) Eigenwerte

Def.: Ist V ein Skalarproduktraum, so heißt $f \in \mathrm{End}(V)$ normal, wenn $f \circ f^+ = f^+ \circ f$.
Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt normal, wenn
$A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$. ($f^+$ ... adjungierte Abbildung)

Bem.:

(1) Ist f selbstadjungiert, so ist f normal. Die Eigenwerte von f sind reell (auch für $K = \mathbb{C}$).

Bew.: $f^+ = f \Rightarrow f \circ f^+ = f^+ \circ f$. Sei $v \in \mathrm{Eig}(f;\lambda)$
$\lambda \langle v,v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, f(v) \rangle = \langle f(v), v \rangle = \overline{\lambda} \langle v,v \rangle$
$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$. $\square$

(2) Ist f orthogonal/unitär, so ist $f^+ = f^{-1}$, und f ist normal. Die Eigenwerte erfüllen $|\lambda| = 1$.

Bew.: Wegen $|\det f| = 1$ ist f umkehrbar.
$\langle v, f(w) \rangle = \langle f(f^{-1}(v)), f(w) \rangle = \langle f^{-1}(v), w \rangle \quad \forall v,w \in V$.
Also ist $f^+ = f^{-1}$. Wegen $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ ist f normal.
$v \in \mathrm{Eig}(f;\lambda) \Rightarrow \|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1$.
$\square$

Satz: Für $f \in \mathrm{End}(V)$ normal gilt: $\ker f^+ = \ker f$ und $\mathrm{im}\, f^+ = \mathrm{im}\, f$. Insbesondere ist die Zerlegung $V = \mathrm{im}\, f \oplus \ker f$ orthogonal.

Bew.: $v \in \ker f \Leftrightarrow 0 = \underline{\langle f(v), f(v) \rangle} = \underline{\langle f^+(f(v)), v \rangle}$
$= \langle f(f^+(v)), v \rangle = \langle v, f(f^+(v)) \rangle = \langle f^+(v), f^+(v) \rangle$
$\Leftrightarrow f^+(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \ker f^+$.

Nach Satz 2 in §6.4c ist $V = \mathrm{im}\, f^+ \oplus \ker f$ und $V = \ker f^+ \oplus \mathrm{im}\, f$. $\Rightarrow \mathrm{im}\, f = \mathrm{im}\, f^+$.

(orthogonale Summe ist eindeutig) $\square$

Korollar: Ist f normal, so ist $\mathrm{Eig}(f; \lambda) = \mathrm{Eig}(f^+, \overline{\lambda})$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.

Bew.: $g := f - \lambda\, \mathrm{id}_V$. Dann ist $g^+ = f^+ - \overline{\lambda}\, \mathrm{id}_V$.

$$g^+ \circ g = f^+ \circ f - \lambda f^+ \circ \cancel{\mathrm{id}_V} - \overline{\lambda}\, \cancel{\mathrm{id}_V} \circ f + \overline{\lambda} \lambda\, \mathrm{id}_V$$
$$= f \circ f^+ - \overline{\lambda} f - \lambda f^+ + \lambda \overline{\lambda}\, \mathrm{id}_V = g^+ \circ g.$$

$\Rightarrow g$ ist normal $\Rightarrow \mathrm{Eig}(f; \lambda) = \ker g = \ker g^+ = \mathrm{Eig}(f^+, \overline{\lambda})$.

$\square$

Bem.:

(3) Die Rechts- und Linkseigenvektoren symmetrischer bzw. hermitescher Matrizen $A \in K^{n \times n}$ stimmen überein:

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x}^T A = \overline{\lambda}\, \overline{x}^T \qquad (A = \overline{A}^T)$$

(4) Für f selbstadjungiert ($f^+ = f$) folgt $\lambda = \bar{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(5) Jede symmetrische Matrix hat einen reellen Eigenwert.

<u>Bew.:</u> $P_A \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg P_A \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle. Nach (4) ist diese reell. $\square$

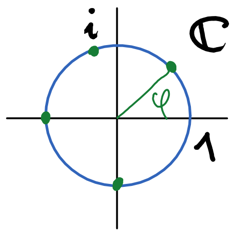
(6) Für $f \in \mathrm{End}(V)$ bijektiv gilt $\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \mathrm{Eig}(f^{-1};\lambda^{-1})$.

<u>Bew.:</u> $v \in \mathrm{Eig}(f;\lambda)$. Wegen f bijektiv ist $\lambda \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} f^{-1}(\lambda v) = \frac{1}{\lambda} f^{-1}(f(v)) = \frac{1}{\lambda} v. \qquad \square$$

(7) Für f orthogonal/unitär ($f^{-1} = f^+$) impliziert das Korollar: $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \iff |\lambda| = 1$

$$\iff \lambda = e^{i\varphi}$$



<u>Proposition:</u> Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ normal, und sind $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von f, so ist $\mathrm{Eig}(f;\lambda) \perp \mathrm{Eig}(f;\mu)$.

„Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal."

<u>Bew.:</u> Wähle $v \in \mathrm{Eig}(f;\lambda)$ und $w \in \mathrm{Eig}(f;\mu)$. Dann ist $f^+(v) = \bar{\lambda} v$ und $f^+(w) = \bar{\mu} w$.

$$\lambda \langle v,w \rangle = \langle f^+(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = \mu \langle v,w \rangle,$$

also $(\lambda - \mu)\langle v,w \rangle = 0$. Mit $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle v,w \rangle = 0$. $\square$

b) Diagonalisierung

<u>Lemma:</u> Sind $f \in \mathrm{End}(V)$ normal und λ ein Eigenwert von f, dann ist $U := \mathrm{Eig}(f;\lambda)^\perp$ f-invariant und die Einschränkung $f|_U$ ist normal.

<u>Bew.:</u> Sei $u \in U$. Für alle $v \in \mathrm{Eig}(f;\lambda)$ gilt:

$$\langle v, f(u)\rangle \overset{1}{=} \langle f^+(v), u\rangle \overset{2}{=} \langle \overline{\lambda} v, u\rangle \overset{3}{=} \lambda \langle v, u\rangle \overset{4}{=} 0.$$

Also ist $f(u) \in \mathrm{Eig}(f;\lambda)^\perp = U$, d.h. $f(U) \subset U$.

Weiterhin ist $f^+(U) \subset U$, denn

$$\langle f^+(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle = \lambda \langle u, v\rangle = 0.$$

$\Rightarrow$ $f|_U \circ f^+|_U$ und $f^+|_U \circ f|_U$ existieren und sind gleich, also ist $f|_U$ normal. □

[1] Def. f^+, [2] obiges Korollar, [3] Semilinearität, [4] $u \in \mathrm{Eig}(f;\lambda)^\perp$

<u>Bem.:</u>

(1) Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis mit $v_1, \dots, v_r \in \mathrm{Eig}(f;\lambda)$.

Dann ist

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & D \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}\lambda\\ \ddots\\ \lambda\end{array}}\right\} r\text{-mal} \\ \left.\vphantom{D}\right\} n-r \text{ Zeilen} \end{array}$$

$\mathrm{Eig}(f;\lambda)$ und U verhalten sich unter f unabhängig, sie sind „entkoppelt".

<u>Korollar:</u> Zu $f \in \mathrm{End}(V)$ normal gibt es eine orthogonale Zerlegung in f-invariante Untervektorräume:

$$V = \mathrm{Eig}(f; \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(f; \lambda_k) \oplus U. \quad (\to \S 7.2a)$$

<u>Satz:</u> Sei V ein unitärer Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Zu einem $f \in \mathrm{End}(V)$ gibt es genau dann eine orthonormale Eigenbasis, wenn f normal ist.

<u>Bew.:</u> Sei f normal. Wegen $K = \mathbb{C}$ hat das charakteristische Polynom mindestens eine Nullstelle λ_1.
Aus dem Lemma folgt, daß $V = \mathrm{Eig}(f; \lambda_1) \oplus U$ mit $\dim U < \dim V$, und $f|_U$ ist normal.
Ist $\dim U \geq 1$, dann ist $\deg P_{f|_U} \geq 1$, und $f|_U$ hat einen Eigenwert $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Iteriere das Argument bis $\dim U = 0$.
Umkehrung: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine orthonormale Eigenbasis mit $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Dann ist $f^+(v_i) = \overline{\lambda_i} v_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, weil für alle $j = 1, \ldots, n$:

$$\langle f^+(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, f(v_j) \rangle = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$$
$$= \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle \overline{\lambda_i} v_i, v_j \rangle.$$

Weiter folgt: $f(f^+(v_i)) = f(\overline{\lambda_i} v_i) = \overline{\lambda_i} \lambda_i v_i = \ldots = f^+(f(v_i))$, d.h. $f \circ f^+$ und $f^+ \circ f$ stimmen auf $\mathcal{B}$ überein.
$\Rightarrow f \circ f^+ = f^+ \circ f$, f ist normal. $\square$

Korollar: (Spektraldarstellung) 15.2.

Sind V unitär und $f \in \mathrm{End}(V)$ normal mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, dann hat f die Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i ,$$

wobei $P_i \in \mathrm{End}(V)$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Eig}(f; \lambda_i)$ bezeichnet, $i = 1, \dots, k$. Sind $(v_1^{(i)}, \dots, v_{r_i}^{(i)})$ die Basen der $\mathrm{Eig}(f; \lambda_i)$, so gilt:

$$f = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_i |v_j^{(i)}\rangle \langle v_j^{(i)}| . \qquad \text{(Bra-ket-Notation)}$$

Korollar 2:

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann normal, wenn sie unitär diagonalisierbar ist, d.h. wenn es ein $S \in U(n)$ gibt, so daß $S A \underset{\overline{S}^T}{\underset{\parallel}{S^{-1}}}$ diagonal ist.

Bew.: Nehme orthonormierte Eigenbasis von $\mathbb{C}^n$ bezüglich A. Diese Vektoren bilden die Spalten von S^{-1}. Wegen Orthonormalität ist S^{-1} unitär, also $S^{-1} = \overline{S}^T$. Konkret: $\overline{S}^T = (v_1, \dots, v_n)$ und $A v_i = \lambda_i v_i$. Dann ist:

$$S A S^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{v_1}^T \\ \vdots \\ \overline{v_n}^T \end{pmatrix} A (v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} \overline{v_1}^T \\ \vdots \\ \overline{v_n}^T \end{pmatrix} (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = (\lambda_i \delta_{ij})$$

$\square$

c) euklidische Vektorräume ($K=\mathbb{R}$)

Erinnerung: Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, dann sind alle Eigenwerte reell. Also zerfällt $P_f \in \mathbb{C}[t]$ stets in reelle Linearfaktoren. Wegen $\mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$ gilt das auch für euklidische Vektorräume ($K=\mathbb{R}$).
Alle Ergebnisse des vorigen Abschnitts übertragen sich.

Satz: Ein selbstadjungiertes $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim V < \infty$ ist diagonalisierbar ($K=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Korollar: Eine symmetrische, reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar, d.h. es gibt ein $S \in SO(n)$, so daß SAS^T eine Diagonalmatrix ist.

Satz:
Sind V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal, so gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$V = \mathrm{Eig}(f;1) \oplus \mathrm{Eig}(f;-1) \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$$

mit f-invarianten Untervektorräumen U_i, wobei $\dim U_i = 2$.

Lemma: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $1 \leq \dim V < \infty$. Zu jedem $f \in \mathrm{End}(V)$ gibt es einen f-invarianten Unterraum U mit $1 \leq \dim U \leq 2$.

Bew.: Hat f einen Eigenvektor v, dann ist $U = \mathrm{span}(v)$ invariant. Andernfalls hat $P_f \in \mathbb{R}[t]$ keine Nullstelle, aber einen Teiler $Q \in \mathbb{R}[t]$ mit $\deg Q = 2$ der Form $Q = (t-\lambda)(t-\bar{\lambda})$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

$P = Q \cdot R$ (§1.4c)

Komplexifizierung von V und f: Seien $\mathcal{B}$ eine Basis in V und $A := M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{R}^{n\times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$. Definiere $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $z \mapsto Az$. Nun ist aber $P_\varphi = P_f$, also hat φ die Eigenwerte $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

Sei $z \in \mathrm{Eig}(\varphi; \lambda) \subset \mathbb{C}^n$. Dann ist $\bar{z} \in \mathrm{Eig}(\varphi; \bar{\lambda})$, denn $\varphi(\bar{z}) \underset{A=\bar{A}}{=} \overline{Az} = \overline{\varphi(z)} = \bar{\lambda}\bar{z}$. $\Rightarrow z \perp \bar{z}$.

$\Phi_{\mathcal{B}}: \mathbb{R}^n \to V$ Koordinatensystem

Setze $x := z + \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ und $v := \Phi_{\mathcal{B}}(x) \in V$. $f(v)$ und v sind linear unabhängig (kein Eigenvektor von f).

$\Rightarrow$ $U := \mathrm{span}(v, f(v))$ mit $\dim U = 2$. Wir zeigen:

$$2(\mathrm{Re}\,\lambda)\, f(v) = f^2(v) + |\lambda|^2 v \qquad (*)$$

$\Rightarrow f^2(v) \in U$, also ist U f-invariant.

$$f(v) = \Phi_{\mathcal{B}}(Ax) = \Phi_{\mathcal{B}}(\lambda z + \overline{\lambda}\overline{z}), \quad f^2(v) = \Phi_{\mathcal{B}}(\lambda^2 z + \overline{\lambda}^2 \overline{z}).$$

Damit folgt Gl. (*) aus

$$\underbrace{(\lambda+\overline{\lambda})}_{2\,\mathrm{Re}\,\lambda}\underbrace{(\lambda z + \overline{\lambda}\overline{z})}_{\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(f(v))} = \underbrace{\lambda^2 z + \overline{\lambda}^2 \overline{z}}_{\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(f^2(v))} + \underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{|\lambda|^2}\underbrace{(z+\overline{z})}_{\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)}.$$

$\square$

Bem.:

(1) Wegen $Q = t^2 - 2(\mathrm{Re}\,\lambda)t + |\lambda|^2$ entspricht Gl. (*)

$$Q(f) = 0 \in \mathrm{End}(V)$$

(für $Q = P_f$: Satz von Caley-Hamilton)

(2) Die Einschränkung einer orthogonalen Abbildung auf einen invarianten Unterraum ist orthogonal.

Bew.: $\langle u,v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$ für $u,v \in U \subset V$. $\square$

(3) Für $f \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal und $W \subset V$ f-invariant ist $U := W^\perp$ ebenfalls f-invariant.

Bew.: Wegen f orthogonal ist f injektiv und damit $f(W) = W$, $\dim W < \infty$. Da auch f^{-1} orthogonal ist, folgt für $w \in W$ und $u \in U$:

$$\langle w, f(u)\rangle = \langle f^{-1}(w), f^{-1}(f(u))\rangle = \langle \underbrace{f^{-1}(w)}_{\in W}, \underbrace{u}_{\in W^\perp}\rangle = 0$$

$\Rightarrow f(u) \in W^\perp$, also $f(U) = U$.

$\square$

Beweis des Satzes:

Für f orthogonal ist $|\lambda| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Also gilt:

$$V = \mathrm{Eig}(f; 1) \oplus \mathrm{Eig}(f; -1) \oplus U \quad \text{mit } f(U) \subset U. \quad (§7.36)$$

$\Rightarrow f|_U : U \to U$ ist orthogonal. Nach dem Lemma gibt es ein f-invariantes $W \subset U$ mit $\dim W = 2$, und $f|_W$ ist orthogonal. Iteriere das Argument für $U' = W^\perp$ (bezüglich U) mit $\dim U' = \dim U - 2$, bis $\dim U' = 0$. $\square$

Korollar: Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine Matrix $S \in O(n)$, so daß

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \boxed{A_1} & \\ & 0 & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix},$$

wobei $A_j \in SO(2) \setminus \{1, -1\}$ für $j = 1, \dots, k$.

Die A_j sind von der Form $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta_j) & -\sin(\vartheta_j) \\ \sin(\vartheta_j) & \cos(\vartheta_j) \end{pmatrix}$ mit $\vartheta_j \in [0, 2\pi)$, $\vartheta_j \neq 0, \pi$.

Bew.: $A_j \in O(2) \setminus \{1, -1\}$ klar. Wegen $Q_j(0) = |\lambda_j|^2 = 1$ ist $\det A_j = +1$. Es gilt $\lambda_j = e^{i\vartheta_j}$. $\square$

d) Anwendung: Quantenoszillator

(1) Seien V ein geeigneter Hilbertraum, $a \in \mathrm{End}(V)$ ein „linearer Operator" und a^+ die adjungierte Abbildung, wobei gelte:

$$\underbrace{[a, a^+]}_{\text{Kommutator}} := aa^+ - a^+a = 1.$$

(2) <u>Beispiel</u>: V ist ein Funktionenraum mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$, $f, g \in V$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

z.B. $V = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$

Dann erfüllt

$$a^+: V \to V, \quad \varphi(x) \mapsto \frac{1}{2} x\, \varphi(x) \pm \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x)$$

partielle Integration

$$aa^+ \varphi(x) - a^+ a \varphi(x) = \varphi(x), \text{ also } [a, a^+] = 1.$$

(3) Wegen $[a, a^+] \neq 0$ ist a nicht normal. Aber der Operator $N := a^+ a$ ist selbstadjungiert. Der Hamiltonoperator $H = \hbar\omega(a^+ a + \frac{1}{2})$ beschreibt einen harmonischen Quantenoszillator.

$$H\varphi(x) = \hbar\omega\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(x)$$

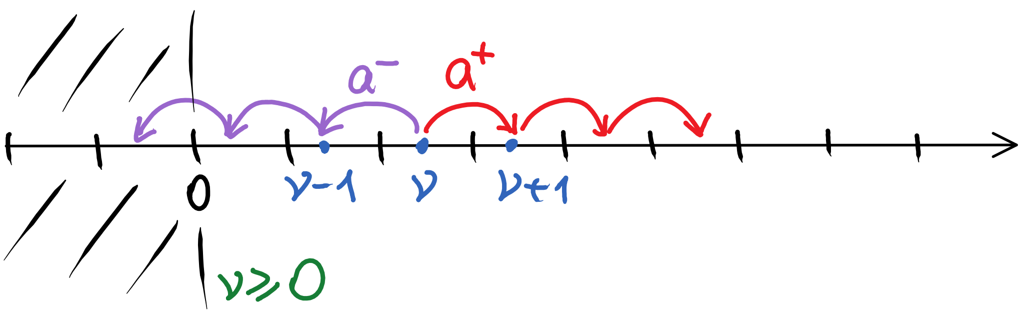
(4) die Eigenzustände (Eigenvektoren) von H sind die Lösungen der Schrödingergleichung: $H|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle$.

(5) N ist diagonalisierbar, da selbstadjungiert.
Sei $\psi_\nu = \underbrace{|\nu\rangle}_{\text{„Ket"}} \in \mathrm{Eig}(N;\nu)$ mit $\langle\nu|\nu\rangle = 1$, $\nu \in \mathbb{C}$.

(6) N ist nicht-negativ definit, d.h. $\nu \geq 0$.
$\nu = \langle\nu|N|\nu\rangle = \langle\nu|a^+a|\nu\rangle = \langle a\nu|a\nu\rangle \geq 0$

(7) Es gilt:
$$[N,a] = (a^+a)a - a(a^+a) = -[a,a^+]\,a = -a$$
$$[N,a^+] = a^+$$

(8) $a|\nu\rangle \in \mathrm{Eig}(N;\nu-1)$, a ist ein Absteigeoperator.
$a^+|\nu\rangle \in \mathrm{Eig}(N;\nu+1)$, a^+ ist ein Aufsteigeoperator.
$$N a|\nu\rangle = (aN-a)|\nu\rangle = (\nu-1)\,a|\nu\rangle$$
$$N a^+|\nu\rangle = (a^+N+a^+)|\nu\rangle = (\nu+1)\,a^+|\nu\rangle$$
Ist ν Eigenwert von N, dann auch $\nu-1$ und $\nu+1$, es sei denn $a|\nu\rangle = 0$ bzw. $a^+|\nu\rangle = 0$.



(9) Zu jedem Eigenwert ν gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit
$$a^k |\nu\rangle = 0.$$
Ansonsten ließen sich negative Eigenwerte generieren, im Widerspruch zu $\nu \geq 0$. □

(10) 0 ist ein Eigenwert von N, und der einzige mit $a|\nu\rangle = 0$.

Es gibt ein $|\mu\rangle \in \mathrm{Eig}(N;\mu)$ mit $a|\mu\rangle = 0$.
$$\Rightarrow \; 0 = \| a|\mu\rangle \| = \langle a\mu | a\mu \rangle = \langle \mu | a^\dagger a | \mu \rangle = \mu.$$
□

(11) Alle Eigenvektoren sind von der Form
$$|\nu\rangle = c_\nu (a^\dagger)^\nu |0\rangle, \quad c_\nu \in \mathbb{R} \text{ und } \nu \in \mathbb{N}_0.$$
└ Normierungskonstante

$\Rightarrow$ Eigenwerte von N haben Abstand 1, starten bei 0.

Für das ursprüngliche Problem $H\psi_\nu = \varepsilon_\nu \psi_\nu$ heißt das: $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, $\quad n \in \mathbb{N}_0$.

Grundzustandsenergie $\frac{\hbar\omega}{2}$, Anregungsenergie $\hbar\omega$.

(12) ähnlich: Eigenfrequenzen einer eingespannten Saite, Leiteroperatoren für Spin bzw. Drehimpuls