5.5 Spur

Eine weitere charakteristische Kennzahl (Invariante) einer $n\times n$-Matrix neben Rang und Determinante ist die Spur:

<u>Def.:</u> Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $A = (a_{ij})$. Dann bezeichnet die Abbildung $sp : K^{n\times n} \to K$, $sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, die Spur.
Ist $sp(A) = 0$, so heißt A spurfrei.
(Summe entlang der Diagonalen, engl.: tr wie „trace".)

<u>Bem.:</u>
(1) sp ist eine lineare Abbildung
$sp(A+\lambda B) = sp(A) + \lambda\, sp(B)$.

(2) Es gelten die Rechenregeln:
(i) $sp(A) = sp(A^T)$ für $A \in K^{n\times n}$ (offensichtlich)

(ii) $sp(AB) = sp(BA)$ für $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times n}$

<u>Bew.:</u> $sp(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = sp(BA)$. □

(iii) $sp(ABC) = sp(CAB) = sp(BCA)$ zyklisch vertauschen
für $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times t}$, $C \in K^{t\times n}$.

<u>Bew.:</u> aus (ii) und Assoziativität □

(iv) Sei $A \in K^{n \times n}$ und $S \in GL(n;K)$. Dann ist

$$sp(A) = sp(S \cdot A \cdot S^{-1}).$$

„Die Spur ist invariant unter Basiswechsel."

(v) Sei $\exp : K^{n \times n} \to K$, $A \mapsto \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, das Matrixexponential.

Für $A \in K^{n \times n}$ gilt: $\det(\exp(A)) = \exp(sp(A))$