3 Matrizenrechnung

3.1 Lineare Gleichungssysteme

a) Motivation

Bsp. 1: Teste Vektoren $(v_1, \dots, v_r)$ aus $\mathbb{R}^n$ auf lineare Unabhängigkeit. Wir suchen alle $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$, so daß $\sum_{i=1}^{r} x_i v_i = 0$. Notation: $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$.

Für $r=2$, $n=3$: $x_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} v_{11} x_1 + v_{21} x_2 &= 0 \\ v_{12} x_1 + v_{22} x_2 &= 0 \\ v_{13} x_1 + v_{23} x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Bsp. 2: Finde Schnitt zweier Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = -6 \} \quad (\mathrm{I})$$
$$E_2 := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = -10 \} \quad (\mathrm{II})$$

$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{ (x,y,z) \text{ ist Lösung des LGS} \}$

Umformungen:
$$x + y + z = -6 \quad (\mathrm{I})$$
$$y + 2z = -4 \quad (\mathrm{II}') = (\mathrm{II}) - (\mathrm{I})$$

$\overset{(\mathrm{II}')}{\Rightarrow} y = -2z - 4 \overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow} x = z - 2$

Lösung: $E_1 \cap E_2 = \{ \lambda(1,-2,1) + (-2,-4,0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

Gerade (1-dimensional, daher 1 Parameter λ)

⚠ Kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$

Def.: Sei K ein Körper. Unter einem linearen Gleichungssystem in den Unbekannten $x_1, \dots, x_n \in K$ versteht man ein System von m Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $a_{ij}, b_i \in K$. Das System heißt homogen, falls $b_1 = \dots = b_m = 0$.

b) Matrixschreibweise

Def.: Eine $m \times n$-Matrix A ist ein rechteckiges Schema mit Einträgen $a_{ij} \in K$, das aus m Zeilen und n Spalten besteht:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Menge der $m \times n$-Matrizen über K wird mit $K^{m \times n}$ oder $M(m \times n, K)$ bezeichnet.

Def.: Seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$ zwei Matrizen mit Koeffizienten $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le r}}$.
Dann definieren wir das Matrixprodukt

$$\cdot : K^{m\times n} \times K^{n\times r} \to K^{m\times r},\quad (A,B) \mapsto A\cdot B = C$$

mit $C = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le r}}$ durch $c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$.

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \boxed{a_{i1} \;\cdots\!\longrightarrow\; a_{in}} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ \vdots\downarrow \\ b_{nk} \end{matrix}} & \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Zeile i $\times$ Spalte k $=$ Eintrag ik

Bem.:

(1) Ist $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ eine Spalte, also $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, „Spalten-vektor"
so ist $C \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ ebenfalls eine Spalte, und es gilt: $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_j$. Ausführlich:

$$m\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right.\overbrace{}^{n} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{n \text{ Zeilen}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \ldots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \ldots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}}_{m \text{ Zeilen}} = \left.\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\right\}m$$

(2) die Zahl der Spalten von A muß mit der Zahl der Zeilen von B übereinstimmen.

(3) Multiplikation einer Zeile mit einer Spalte:

$A \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $\Rightarrow$ $C = \mathbb{R}^{1\times 1}$

$$(a_1 \cdots a_n)\cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) = (c_{11})$$

$\to$ Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

(4) Multiplikation einer Spalte mit einer Zeile:

$A \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{1 \times r}$ $\Rightarrow$ $C = \mathbb{R}^{m \times r}$ Matrix!

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_r \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_r \\ \vdots & & & \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_r \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Tensorprodukt

(5) effiziente Schreibweise für ein LGS aus m Gleichungen für n Unbekannte:

$Ax = b$

$A \in K^{m \times n}$ Koeffizientenmatrix

$x \in K^{n \times 1}$ n Unbekannte (Spalte)

$b \in K^{m \times 1}$ m Konstanten

$(A|b) \in K^{m \times (n+1)}$ heißt erweiterte Koeffizientenmatrix.

Das LGS heißt homogen, falls $b = 0$.